

**|Управління освіти Голосіївської районної в місті Києві
державної адміністрації
Районний науково-методичний центр**

**СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ ПРИ
РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З
ПАРАМЕТРАМИ В ШКІЛЬНОМУ
КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

Авторська розробка вчителя математики
школи II-III ступенів № 319 імені Валерія
Лобановського міста Києва
Наталі ФЕДОРЧУК

ЗМІСТ

I. Вступ	3
II. Основна частина	
Задачі з параметрами в шкільному курсі математики.....	5-46
1. Лінійні рівняння з параметрами.....	5
2. Рівняння з параметрами, що зводяться до лінійних.....	11
3. Розв'язування квадратних рівнянь із параметрами та рівнянь, що зводяться до них.	13-27
3.1. Класифікація задач на дослідження квадратного тричлена.....	13
3.2. Розв'язування основних задач на дослідження квадратного тричлена з коефіцієнтами, залежними від параметра.	14
3.3. Умови розміщення коренів квадратного рівняння відносно заданих точок.....	17
3.4. Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена належали певному інтервалу відносно чисел m і n на числовій прямій.....	20
3.5. Узагальнююче повторення.....	28
4. Рівняння з параметрами, що містять знак модуля	29
5. Раціональні рівняння з параметрами.....	31
6. Графічний спосіб розв'язування рівнянь із параметрами	36
7. Орієнтовне календарно-тематичне планування програми курсу за вибором «Задачі з параметрами»	43-46
7.1 Орієнтовне календарно-тематичне планування програми курсу за вибором «Задачі з параметрами» в 10-11 класах.....	43
7.2 Орієнтовне календарно-тематичне планування програми факультативного «Задачі з параметрами» в 9 класі.....	46
III. Висновки.....	47
Література.....	48

I. ВСТУП

*Багато чого з математики не залишається
в пам'яті, але коли розумієш її, тоді
легко при нагоді згадати призабуте.*

М. В. Остроградський

Програма з математики загальноосвітньої школи частково передбачає формування в учнів умінь розв'язувати задачі з параметрами, реалії сьогодення диктують необхідність ознайомити учнів із задачами з параметрами та методами їх розв'язування. Задачі такого типу учням доводиться розв'язувати на математичних олімпіадах, конкурсах, зовнішньому незалежному оцінюванні з математики.

Задачі з параметрами є одним з найпотужніших засобів узагальнення та систематизації знань учнів, формування в них логічності, гнучкості, критичності мислення, дивергентних здібностей. Розв'язування задач із параметрами відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів необхідних для математичного розвитку особистості.

Введення задач з параметрами доцільно розпочинати поступово при вивченні алгебри.

Організація таких занять сприятиме, розширенню та поглибленню знань учнів з математики, підготовці їх до олімпіад різних рівнів. Уміння розв'язувати нестандартні задачі з параметрами свідчить про глибоке знання, розуміння математичної теорії та знаходження особливого, нестандартного підходу до виконання вправ.

Програма курсу «Задачі з параметрами» передбачає розширення та поглиблення змісту тем: «Рівняння та системи рівнянь», «Нерівності» тощо. Основні завдання курсу «Задачі з параметрами»:

- розширити та поглибити загальноосвітній курс математики;
- забезпечити високий рівень математичної підготовки шляхом систематизації та узагальнення навчальних досягнень учнів з алгебри під час вивчення параметрів;

- формувати уявлення про задачі з параметрами, навички їх розв'язування за допомогою схем, алгоритмів;
- ліквідувати розбіжності між рівнем навчальних досягнень з математики випускників школи та вимогами до математичної підготовки абітурієнтів вищих навчальних закладів.

«Рівняння з параметрами» є важливим розділом у курсі математики. В учнів формується поняття про те, яким чином значення параметра впливає на множину розв'язків рівнянь. Вони набувають навичок відокремлювати і групувати конкретні значення параметра або проміжки значень відповідно виду, до якого зводиться задане рівняння при цих значеннях параметра. Ознайомлюються з графічними методами розв'язування рівнянь, які дають наближені результати та потребують перевірки.

Тема «Нерівності з параметрами» формують в учнів евристичне мислення, навички аналізу та математичну інтуїцію.

Розгляд функцій має займає значне місце в курсі алгебри. Властивості функції є підґрунтям для розв'язування широкого кола задач, рівнянь, нерівностей. Це стосується задач як алгоритмічного, так і дослідницького характеру. Провідна роль серед останніх належить задачам із параметрами, під час розв'язування, яких важливим є функціональний підхід.

Особливістю організації навчально-виховного процесу є створення сприятливих умов для навчання на більш високому рівні тим учням, які мають здібності до математики. У зв'язку з цим особливу увагу слід приділити диференційованому навчанню та індивідуальній роботі з учнями. Крім того, важливою умовою організації навчально-виховного процесу є вибір учителем раціональної системи методів та прийомів навчання, використання нових інформаційних технологій у поєднанні з традиційними засобами. Плануючи та організовуючи навчальні заняття, слід забезпечити органічний зв'язок теоретичного матеріалу з розв'язуванням задач.

II. Основна частина

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

*Навчання мистецтву розв'язувати
задачі – це виховання волі.*

Д. Поїа

При розв'язуванні прикладів з параметром, який надалі будемо позначати літерою a , b , p ... слід пам'ятати, що існує два підходи до цих задач:

- для кожного можливого значення параметра знайти усі розв'язки заданого рівняння або нерівності;
- знайти усі значення параметра, при кожному з яких розв'язки рівняння існують або задовольняють задані умови.

Розв'язати рівняння з параметром означає знайти для довільного припустимого значення a множину усіх коренів заданого рівняння. Головний метод розв'язування таких задач:

- знайти інтервали змінювання параметра a , на кожному з яких задане рівняння розв'язується одним методом;
- знайти розв'язки рівняння на кожному отриманому проміжку.

У відповіді вказують інтервали змінювання параметра та відповідні розв'язки рівняння.

1. Лінійні рівняння з параметрами

$$ax = b$$

де x – змінна;
 a, b – деякі числа

$a \neq 0, b \in \mathbb{R}$	$a = 0, b \neq 0$	$a = 0, b = 0$
Рівняння має один корінь	Рівняння коренів не має	Рівняння має безліч коренів
$x = \frac{b}{a}$	$x \in \emptyset$	$x \in \mathbb{R}$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax = 1$.

Розв'язання

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Якщо $a = 0$, то $0x = 1$, рівняння коренів не має, $x \in \emptyset$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $ax - 3 = b$, залежно від параметра a і b .

Розв'язання

$$ax = b + 3;$$

$$\text{Якщо } a \neq 0, \quad b \in R, \quad \text{то } x = \frac{b+3}{a}.$$

Якщо $a = 0$, $b \neq -3$, то $0x = b + 3$ причому $b + 3 \neq 0$, рівняння коренів не має $x \in \emptyset$.

Якщо $a = 0$, $b = -3$, то $0x = 0$; рівняння має безліч коренів, $x \in R$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(a - 1)(a + 1)x - a - 1 = 0$,
залежно від параметра a .

Розв'язання

$$(a - 1)(a + 1)x = a + 1;$$

$$(a - 1)(a + 1) = 0 \text{ при } a = 1; a = -1;$$

Якщо $a = 1$, то $0x = 2$. рівняння коренів не має, $x \in \emptyset$.

Якщо $a = -1$, $b \neq -3$, то $0x = 0$. коренем є будь-яке число, $x \in R$.

$$\text{Якщо } |a| \neq 1, \text{ то } x = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)};$$

$$x = \frac{1}{a-1}.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(a + 4)x - 2,5x = (a - 2)(a + 3) + 3,5x$,
залежно від параметра a .

Розв'язання

$$(a + 4)x - 2,5x - 3,5x = (a - 2)(a + 3);$$

$$((a + 4) - 2,5 - 3,5)x = (a - 2)(a + 3);$$

$$(a - 2)x = (a - 2)(a + 3).$$

$$\text{Якщо } a \neq 2, \text{ то } x = \frac{(a-2)(a+3)}{(a-2)};$$

$$x = a + 3.$$

Якщо $a = 2$, то $0x = 0$, коренем є будь-яке число, $x \in R$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $7,5x - 2ax - a^2 = 5,5x - 3ax - 4$.

Розв'язання

$$(7,5 - 2a - 5,5 + 3a)x = a^2 - 4;$$

$$(a+2)x = a^2 - 4;$$

$$(a+2)x = (a - 2)(a+2)$$

$$\text{Якщо } a \neq -2, \text{ то } x = \frac{(a-2)(a+2)}{(a+2)};$$

$$x = a - 2.$$

Якщо $a = -2$, то $0x = 0$, коренем є будь-яке число, $x \in R$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $(a^2 - 1)x = a^2 + 3a - 4$

Розв'язання

$$(a - 1)(a + 1)x = a^2 + 3a - 4$$

При $a = 1$, то $0x = 0$, коренем є будь-яке число, $x \in R$.

При $a = -1$, то $0x = -6$, рівняння коренів не має, $x \in \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{При } a \neq \pm 1, \text{ то } x &= \frac{a^2 + 3a - 4}{(a - 1)(a + 1)}; \\ x &= \frac{(a + 4)(a - 1)}{(a - 1)(a + 1)} \\ x &= \frac{a + 4}{a - 1}. \end{aligned}$$

Відповідь.

Якщо $a = 1$, то $x \in R$.

Якщо $a = -1$, $x \in \emptyset$.

$$\text{Якщо } a \neq \pm 1, \text{ то } x = \frac{a + 4}{a - 1}$$

Завдання для самоперевірки

Завдання для самоперевірки №1	
При яких значеннях параметра a рівняння $(2a + 1)(x - 2) = 2ax + a - 2$ має нульовий роз'язок?	Виберіть правильну відповідь: 1) $a = -1$; 2) $a = 0$; 3) $a = 1$; 4) $a \leq -2$ 5) таких значень немає

Завдання для самоперевірки №2	
При яких значеннях параметра p рівняння $p^2x - 2 = p(2 - x)$ має нескінченну множину роз'язків?	Виберіть правильну відповідь: 1) $p = -1$; 2) $p = 0$; 3) $p = 1$; 4) $p \neq 1$ 5) таких значень немає

Завдання для самоперевірки №3	
При яких значеннях параметра p рівняння $p^2x - 2 = p + 4x$ немає роз'язків?	Виберіть правильну відповідь: 1) $p = -2$; 2) $p = 0$; 3) $p = 2$; 4) $p \neq -2$ 5) таких значень немає

Завдання для самоперевірки №4	
При яких значеннях параметра p рівняння $p^2x + p - 4 = p(5 - x)$ має один додатний розв'язок?	Виберіть правильну відповідь: 1) $p = -1$; 2) $p = 0$; 3) $p > 0$; 4) $p \leq -1$ 5) таких значень немає

Учні самостійно розв'язують завдання, а в кінці роботи відповідь проектується на екран.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $(a + 3)x = 3$

При $a = -3$, то $0x = 3$, рівняння коренів не має, $x \in \emptyset$.
При $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{(a+3)}$.
Відповідь.
Якщо $a = -3$, то $x \in \emptyset$.
Якщо $a \neq -3$, $x = \frac{3}{(a+3)}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $(a^2 - 1)x = a + 1$.

Розв'язання

$$(a - 1)(a + 1)x = a + 1.$$

При $a = 1$, то $0x = 2$. рівняння коренів не має, $x \in \emptyset$.

При $a = -1$, то $0x = 0$, коренем є будь-яке число, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{При } a \neq \pm 1, \text{ то } x = \frac{(a+1)}{(a-1)(a+1)};$$

$$x = \frac{1}{(a-1)}.$$

Відповідь.

Якщо $a = 1$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $a = -1$, то $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Якщо } a \neq \pm 1, \text{ то } x = \frac{1}{(a-1)}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\frac{x}{a} + 2 = 7$, де a – параметр

Розв'язання

Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то $a \neq 0$ не належить області допустимих значення параметра a .

$$\text{Перетворимо рівняння: } \frac{x}{a} + x = 5,$$

$$x \left(\frac{1}{a} + 1 \right) = 5.$$

Для $a \neq 0$ розглянемо два випадки:

1) Коефіцієнт при $x=0$, тобто $\frac{1}{a} + 1 = 0$, $a + 1 = 0$, $a = -1$.

Тоді маємо рівняння: $0 \cdot x = 5$, що не має коренів.

2) Коефіцієнт при $x \neq 0$, тобто $\frac{1}{a} + 1 \neq 0$, $a \neq -1$.

$$\text{Тоді } x = \frac{5a}{a+1}.$$

Відповідь.

Якщо $a = -1$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $a \neq -1$, то $x = \frac{5a}{a+1}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\frac{a}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{a^2+2a-3}{x^2-4}$.

Розв'язання. $\frac{a}{x-2} - \frac{3}{x+2} - \frac{a^2+2a-3}{x^2-4} = 0;$

$$\frac{a(x+2) - 3(x-2) - (a^2+2a-3)}{(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{ax + 2a - 3x + 6 - a^2 - 2a + 3}{(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{(a-3)x - (a^2-9)}{(x-2)(x+2)} = 0;$$

Здобуте рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} (a-3)x = (a-3)(a+3); \\ (x-2)(x+2) \neq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} (a-3)x = (a-3)(a+3); \\ x \neq \pm 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = (a+3); \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Визначимо значення параметра a , при яких

$$a+3 \neq -2; \quad a+3 \neq 2;$$

$$a \neq -5; \quad a \neq -1$$

При $a \neq -5; a \neq -1$, то $x = a+3$

При $a = 3$, то маємо $\begin{cases} 0x = 0; \\ x \neq \pm 2, \end{cases}$ коренем є будь-яке число, крім ± 2 .

При $a = -5; a = -1$, рівняння коренів не має, $x \in \emptyset$.

Записуючи відповідь, потрібно перевірити, чи всі можливі значення параметра враховано.

Відповідь.

Якщо $a \neq 3, a \neq -1, a \neq -5$, то $x = (a+3)$.

Якщо $a = 3$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Якщо $a = -5$ або $a = -1$, $x \in \emptyset$.

Приклад 10. При яких значеннях параметра a має додатній корінь рівняння

$$\frac{3x^2 + 5 - ax}{3x - a} = \frac{3 - ax^2 - 4x}{ax - 4}?$$

Розв'язання.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3x^2 + 5 - ax}{3x - a} - \frac{3 - ax^2 - 4x}{ax - 4} = 0, \\ x > 0; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(3x^2 + 5 - ax)(ax - 4) - (3 - ax^2 - 4x)(3x - a)}{(3x - a)(ax - 4)} = 0, \\ x > 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(5a - 9) = 20 - 3a, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{a}{3}, \\ x \neq \frac{4}{a}; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{20 - 3a}{5a - 9} \\ x > 0, \\ x \neq \frac{a}{3}, \\ x \neq \frac{4}{a}; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{20 - 3a}{5a - 9} > 0, \\ \frac{20 - 3a}{5a - 9} \neq \frac{a}{3}, \\ \frac{20 - 3a}{5a - 9} \neq \frac{4}{a}; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a < 6\frac{2}{3}, \\ a > 1.8, \\ a \neq \pm 2\sqrt{3}; \end{array} \right.$$

Відповідь.

При $a \in (1.8; 2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; 6\frac{2}{3})$.

Вправи для самостійного розв'язання

Залежно від параметра розв'яжіть рівняння:

№ з/п	Рівняння	Відповідь.
1.	$ax = -3$	Якщо $a = 0$, то $x \in \emptyset$. Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{-3}{a}$.
2.	$7ax = x + 4a$	Якщо $a = \frac{1}{7}$, то $x \in \emptyset$. Якщо $a \neq \frac{1}{7}$, то $x = \frac{4a}{7a-1}$.
3.	$3(x + 1) = 4 + ax$	Якщо $a = 3$, то $x \in \emptyset$. Якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{3-a}$.
4.	1) $(a^2 - 49)x = a - 7$.	Якщо $a = -7$, то $x \in R$. Якщо $a = 7$, то $x \in \emptyset$. Якщо $a \neq \pm 7$, то $x = \frac{1}{a-7}$.
5.	$(a^2 - 9)x = a^2 + 2a - 3$.	Якщо $a = -3$, то $x \in R$. Якщо $a = 3$, то $x \in \emptyset$. Якщо $a \neq \pm 3$, то $x = \frac{a-1}{a-3}$.
6.	$(a^2 - 9)x = a^2 + 2a - 3$.	Якщо $a = -3$, то $x \in R$.

		Якщо $a = 3$, то $x \in \emptyset$ Якщо $a \neq \pm 3$, то $x = \frac{a-1}{a-3}$.
7.	$(a^3 - a^2 - 4a + 4)x - a + 1 = 0$.	Якщо $a = 1$, то $x \in R$. Якщо $a = \pm 2$, то $x \in \emptyset$ Якщо $a \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{a^2 - 4}$.
8.	$\frac{4x + 3b}{3} = \frac{5x - 2b}{4}$	Якщо $b \in R$, то $x = -18b$
9.	$\frac{ax + 1}{3} + \frac{4a - x}{2} = \frac{a^2}{6}$	Якщо $a = 1,5$, то $x \in \emptyset$ Якщо $a \neq 1,5$, то $x = \frac{a^2 - 12a - 2}{2a - 3}$
10.	$\frac{(1-a)^2}{x-a} = \frac{(1+a)^2}{x+a}$	Якщо $a = 0$, то $x \in R$ крім 0 Якщо $a = -1$, то $x \in \emptyset$ Якщо $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{a^2 + 1}{2}$.

2. Рівняння з параметрами, що зводяться до лінійних

Розглянемо рівняння, які містять два параметри, а також рівняння, параметри і розв'язки яких задовольняють заданій умові

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{a}{x} - \frac{1}{a} = \frac{b}{x} - \frac{1}{b}$.

Розв'язання.

Знаходимо ОДЗ невідомого і параметрів: $x \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}; \quad \frac{a-b}{x} = \frac{b-a}{ab}$$

Враховуючи, що $x \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, маємо $(b-a)x = ab(a-b)$

Отже, за вказаних умов задане рівняння зведи до лінійного.

Досліджуємо його:

якщо $(a-b) \neq 0$ і $a \neq b$, то $x = \frac{ab(b-a)}{a-b}$;

якщо $(a-b) = 0$ і $a = b$, то $0x = 0$, коренем є будь-яке число, $x \in R$.

Оскільки $a \neq 0$, $b \neq 0$, то:

при $a \neq b$, $x = -ab \neq 0$ і тому належить ОДЗ невідомого;

при $a = b$, $x = 0$ і тому не належить ОДЗ невідомого, тому $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Відповідь.

Якщо $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = -ab$.

Якщо $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Якщо $a = 0$, $b = 0$, то $x \in \emptyset$

Приклад 2. Знайти всі дійсні значення параметра a , при яких рівняння $\frac{ax+2}{x-1} + \frac{a-1}{3} = 0$ має корінь, що задовольняє умову $|x| \leq 2$.

Розв'язання.

Знаходимо ОДЗ невідомого: $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$

$$\frac{3ax+6+(a-1)(x-1)}{3(x-1)} = 0.$$

Застосуємо умову рівності дробу нулю:

$$\begin{cases} 3ax + 6 + ax - a - x + 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0, \end{cases}$$

$$4ax - x = a - 7,$$

$$(4a - 1)x = a - 7$$

Визначимо при яких значеннях параметра a рівняння матиме один корінь:

$$(4a - 1) \neq 0, \quad a \neq \frac{1}{4}, \quad x = \frac{a-7}{4a-1}.$$

Знайдемо значення, при яких $x \neq 1$:

$$\frac{a-7}{4a-1} \neq 1, \quad a - 7 \neq 4a - 1, \quad a \neq -2.$$

Отже, задане в умові рівняння матиме один розв'язок

$$x = \frac{a-7}{4a-1}, \quad \text{якщо } a \neq \frac{1}{4}, \quad a \neq -2.$$

Оскільки корінь рівняння повинен задовольняти умову $|x| \leq 2$,

то маємо нерівність $\left| \frac{a-7}{4a-1} \right| \leq 2$.

$$\begin{cases} \frac{a-7}{4a-1} \geq -2, \\ \frac{a-7}{4a-1} \leq 2; \end{cases}$$

$$1) \quad \frac{a-7}{4a-1} + 2 \geq 0,$$

$$\frac{a-7+8a-2}{4a-1} \geq 0,$$

$$\frac{9a-9}{4a-1} \geq 0,$$

$$\frac{a-1}{4a-1} \geq 0,$$

$$a \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty).$$

$$2) \quad \frac{a-7}{4a-1} + 2 \leq 0,$$

$$\frac{a-7-8a+2}{4a-1} \leq 0,$$

$$\frac{-7a-5}{4a-1} \leq 0,$$

$$\frac{7a+5}{4a-1} \geq 0$$

$$a \in \left(-\infty; \frac{5}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

$$\begin{cases} \frac{a-1}{4a-1} \geq 0, \\ \frac{7a+5}{4a-1} \geq 0; \end{cases} \quad \text{Отже, } a \in \left(-\infty; \frac{5}{7}\right] \cup [1; +\infty).$$

Оскільки корінь даного рівняння існує за умови $a \neq \frac{1}{4}$, $a \neq -2$, то потрібно виключити число -2 із здобутих проміжків.

Відповідь. $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; \frac{5}{7}] \cup [1; +\infty)$

Вправи для самостійного розв'язання

№ з/п	Рівняння	Відповідь.
1.	При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{2x-a}{x+2} = 2a-1$ має від'ємний корінь?	$a \in (-\infty; -4) \cup (-4; \frac{5}{7}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$
2.	При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{a-x}{a-1} - \frac{x-1}{a+1} = \frac{2a}{a^2-1}$ має невід'ємний корінь?	$a \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$

3. Розв'язання квадратних рівнянь із параметрами та рівнянь, що зводяться до них

$ax^2 + bx + c = 0$ де x – змінна; a, b, c – деякі числа $a \neq 0$
$D = b^2 - 4ac$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Рівняння має два кореня	Рівняння має один корінь	Рівняння коренів не має
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-b}{2a}$	$x \in \emptyset$

Якщо $a = 0$ то рівняння є лінійним $bx + c = 0$

Теорема Вієта

Якщо x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

1. Класифікація задач на дослідження квадратного тричлена

$$y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$$

Квадратний тричлен, коефіцієнти якого залежать від параметра a .

$$D = B^2 - 4AC$$

Дискримінант цього рівняння.

$x_0 = -\frac{B}{2A}$ - абсциса вершини параболи
$y_0 = -\frac{D}{4A}$ - ордината вершини параболи
$y(\alpha) = f(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C$ - значення квадратного тричлена при $x = \alpha$

Сформулюємо такі основні задачі:

- 1) Розв'язати рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$.
- 2) Розв'язати нерівність або їх систему.
- 3) Знайти всі значення a , за яких рівняння має дійсні корені, і визначити їх знаки.
- 4) Дослідити розташування дійсних коренів рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ відносно заданої точки чи проміжку.
- 5) Знайти всі значення параметра a , за яких з однієї нерівності випливає інша.
- 6) Визначити всі значення a , за яких корені рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ задовольняють задану умову.
- 7) Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $A_1(a)x^2 + B_1(a)x + C_1(a) = 0$ та $A_2(a)x^2 + B_2(a)x + C_2(a) = 0$ мають спільні корені (або хоча б один спільний корінь)
- 8) Знайти всі значення a , за яких квадратний тричлен $y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ чи задана функція $P(x_1; x_2)$, де x_1, x_2 - дійсні корені рівняння (1), набуває найбільшого (найменшого) значення на заданому проміжку.

2. Розв'язування основних задач на дослідження квадратного тричлена з коефіцієнтами, залежними від параметра.

Розв'язування квадратного рівняння з коефіцієнтами, залежними від параметра:

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0 \quad (1)$$

Під час розв'язання (1) треба врахувати, що

* при $A = 0$ це рівняння буде лінійним, тому рівняння (1) еквівалентне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} A = 0, \\ Bx + C = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} A \neq 0, B^2 - 4AC \geq 0, \\ x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \end{cases} \quad (2)$$

Якщо x_1, x_2 - корені рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$, то

* при $A > 0$ маємо $x_1 < x_2$, а

* при $A < 0$ $x_1 > x_2$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння
 $(a-2)x^2 - 4(a+3)x + a-1 = 0$

Розв'язання.

Дане рівняння еквівалентне сукупності двох систем (див. (2)):

$$\begin{cases} a = 2, \\ x = \frac{1}{20} \end{cases} \text{ та } \begin{cases} a \neq 0, \quad 3a^2 + 27a + 34 \geq 0, \\ x_{1,2} = \frac{-2(a+3) \pm \sqrt{3a^2 + 27a + 34}}{a-2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи нерівність $(a-2)x^2 - 4(a+3)x + a-1 \geq 0$, знаходимо ті значення a , за яких x_1, x_2 набувають дійсних значень:

$$a \in \left(-\infty; \frac{-27-\sqrt{321}}{6}\right] \cup \left[\frac{-27+\sqrt{321}}{6}; \infty\right) \setminus \{2\}, \text{ то}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2(a+3) \pm \sqrt{3a^2 + 27a + 34}}{a-2}.$$

Відповідь.

Якщо $a=2$, то $x=\frac{1}{20}$; якщо

$$a \in \left(-\infty; \frac{-27-\sqrt{321}}{6}\right] \cup \left[\frac{-27+\sqrt{321}}{6}; \infty\right) \setminus \{2\}, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-2(a+3) \pm \sqrt{3a^2 + 27a + 34}}{a-2}$$

Розв'язування квадратних нерівностей (та їх систем) з коефіцієнтами, залежними від параметра.

Під час розв'язання нерівності $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) < 0$ (3)

Зручно розглянути спочатку випадок $A=0$ (тоді (3) буде лінійною нерівністю), а у випадку $A \neq 0$ скористатися методом інтервалів, врахувавши при цьому, що вид розв'язку квадратної нерівності визначається знаком коефіцієнта A при x^2 дискримінанта D .

Приклад 2 Розв'язати нерівність

$$(a^2 - 1)x^2 - 2(a^2 + 3a + 2)x + a + 2 > 0.$$

Розв'язання.

Розглянемо спочатку випадок, коли дана нерівність буде лінійною, тобто $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.

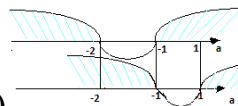
Підставимо ці значення a в нерівність і одержимо при $a=1$:

$$-12x + 3 > 0, x < \frac{1}{4}, \text{ а при } a=-1: 1 > 0, x \in R.$$

При $a \neq \pm 1$ обчислимо дискримінант D і подамо його у формі, зручній для визначення проміжків знакосталості:

$$\frac{D}{4} = (a^2 + 3a + 2)^2 - (a^2 - 1)(a + 2) = (a^2 + 2a + 3)(a + 1)(a + 2)$$

На паралельних координатних осях a відкладаємо проміжки



знакосталості D та A (мал.1)

Провівши через точки $a = -2$, $a = -1$, $a = 1$ вертикальні прямі, одержимо проміжки, на кожному з яких легко вказати вид розв'язку даної нерівності.

$$x_1 = \frac{a^2 + 3a + 2 - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a^2 - 1}, \quad x_2 = \frac{a^2 + 3a + 2 + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a^2 - 1}$$

Відповідь.

Якщо $a \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$, то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

Якщо $a = 2$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

Якщо $a \in (-2; -1)$, то $x \in (-\infty; \infty)$

Якщо $a \in (-1; 1)$, то $x \in (x_2; x_1)$

Розв'язання задач, пов'язаних із знаходженням значень параметра, при яких корені квадратного рівняння задовольняють задані умови. Для визначення значень параметра a , при яких корені квадратного рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$ x_1 та x_2 при $A \neq 0$ задовольняють умову $P(x_2; x_1) = 0$, розглянемо систему рівнянь, еквівалентну поставленій задачі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-C}{A}, \\ P(x_2; x_1) = 0. \end{cases}$$

Визначимо з довільної пари рівнянь x_1 та x_2 і, підставляючи знайдені вирази в рівняння, що залишилося, одержимо співвідношення для знаходження шуканих значень a . При виборі пари рівнянь для визначення x_1 та x_2 варто виходити з простоти їх розв'язання. Дискримінант має бути невід'ємний.

Приклад 3. При яких значеннях a один з коренів рівняння $8x^2 + 2(1 - 4a^2)x + (a + 2)^3 = 0$ дорівнює квадрату іншого?

Розв'язання.

Для визначення шуканих значень a складемо систему, в якій два перші рівняння описують теорему Вієта для даного квадратного рівняння

$$x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} = \frac{4a^2 - 1}{4}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{-C}{A} = \frac{(a+2)^3}{8}, \quad \text{а третє співвідношення містить умову, яка накладається на його корені: } x_2 - x_1^2 = 0.$$

У даному випадку для визначення x_1 та x_2 зручно вибрати друге і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{(a+2)^3}{8}, \\ x_2 = x_1^2; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a+2}{2}, \\ x_2 = x_1^2. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені вирази в перше рівняння системи, одержимо:

$$\frac{a+2}{2} + \frac{(a+2)^2}{4} = \frac{4a^2-1}{4}, \quad a^2 - 2a - 3 = 0, \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $a = -1$, або $a = 3$.

Квадратний тричлен. Тренувальні вправи.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a корені рівняння $ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1 = 0$ (1.1) більші 1?

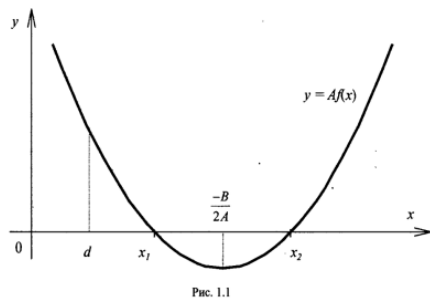
Розв'язання.

Очевидно, що задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a корені квадратного тричлена $f(x) = ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1$ більші 1.

Перехід від одного формулювання задачі до іншого, підкреслює загальну ідею, що пов'язана з описом тих чи інших властивостей квадратного тричлена в їх геометричній інтерпретації на графіку.

Для того, щоб корені квадратного тричлена $f(x) = Ax^2 + Bx + C, (A \neq 0)$ (1.2) були більші числа d , необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{B}{2A} > d, \\ A f(d) > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$



(див. рис. 1.1)

При $a=0$ рівняння (1.1) має корінь $x = -1$, який не задовольняє умову задачі.

Розглянемо випадок $a \neq 0$. При таких a умови (1.3) запишуться у вигляді

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geq 0, \\ \frac{2a+1}{2a} > 1, \\ a(a - (2a+1) + 3a - 1) > 0. \end{cases} \quad \text{Розв'язуючи цю систему, знаходимо, що} \quad a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right].$$

Очевидно, що цей же результат ми отримали б і розв'язуючи нерівність $x_1 > 1$, де x_1 - менший корінь рівняння (1.1).

Відповідь. $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right].$

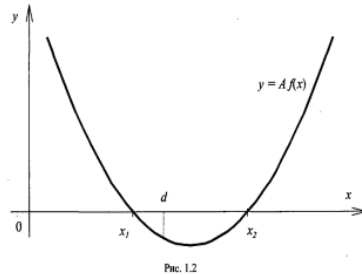
Приклад 5. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a = 0$

більший числа a , а другий менший числа a ?

Розв'язання.

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a корені квадратного тричлена $g(x) = (a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a$ лежать на дійсній осі по різні сторони від точки $x = a$?

Для розв'язування цієї задачі скористаємося тим загальним фактом, що для того щоб корені квадратного тричлена (1.2) лежали на дійсній осі по різні сторони від числа d , необхідно і достатньо виконання умови $Af(d) < 0$.



(див рис. 1.2)

У нашому випадку ця умова приймає вигляд $(a^2 - 2)g(a) < 0$.

Тобто, вимогу задачі задовольняють розв'язки нерівності

$$(a^2 - 2)((a^2 - 2)a^2 + (a^2 + a - 1)a - a^3 + a) < 0, \text{ де } a^2 - 2 \neq 0$$

($a = \pm\sqrt{2}$ не задовольняють вимогу задачі).

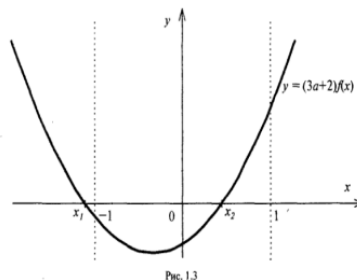
Розв'язуючи отриману нерівність, знаходимо, що $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$. Варто сказати, що розв'язуючи цю задачу іншим способом, розглядаючи нерівності $x_1 < a$ і $x_2 > a$ досить складно.

Відповідь. $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Приклад 6. При яких значеннях параметра a корені x_1 та x_2 рівняння $(3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$ задовольняють умовам $x_1 < -1 < x_2 < 1$?

Розв'язання.

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a тільки один, а саме – більший корінь квадратного тричлена $f(x) = (3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3$, де $3a + 2 \neq 0$ належить інтервалу $(-1; 1)$, а другий – менший -1 .



Вимоги в даній задачі виконуються тільки з-за умов:

$$\begin{cases} (3a + 2)f(-1) < 0, \\ (3a + 2)f(1) > 0 \end{cases}$$

Таким чином ми приходимо до системи

$$\begin{cases} (3a + 2)((3a + 2) - (a - 1) + 4a + 3) < 0, \\ (3a + 2)((3a + 2) + (a - 1) + 4a + 3) > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, приходимо до висновку, що $a \in (-1; -\frac{2}{3})$.

Відповідь. $a \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$

Приклад 7. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - 2(a-1)x + 2a+1 = 0$ і обидва по модулю менші 4?

Розв'язання.

Нехай $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a+1$. Тоді вимоги задачі виконуються, якщо сумісна система

$$\begin{cases} f(-4) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(4) > 0, \end{cases} \text{ , яку запишемо у вигляді } \begin{cases} 10a+9 > 0, \\ 2a+1 < 0, \\ -6a+25 > 0, \end{cases} \text{ тобто } a \in \left(-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2}\right).$$

Відповідь. $a \in \left(-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2}\right)$

Приклад 8. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ по абсолютній величині більший 1, а другий менший одиниці?

Розв'язання.

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a один з двох коренів квадратного тричлена $f(x) = a^2x^2 + ax - 2$ належать на дійсній осі інтервалу $(-1; 1)$,

А другий розміщений поза цим інтервалом, і по модулю не дорівнює одиниці?

Користуючись графіком, відмічаємо, що рівно один корінь тричлена $f(x)$ належить інтервалу $(-1; 1)$ тільки в тому випадку, коли числа $f(-1)$ і $f(1)$ мають різні знаки (корені по модулю не дорівнюють 1), приходимо до висновку, що вимоги задачі виконуються тільки при умові $f(-1) \cdot f(1) < 0$, яка в нашому випадку запишеться у вигляді $(a^2 - a - 2)(a^2 + a - 2) < 0$.

Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо, що $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Приклад 9. При якому значенні параметра a парабола $y = 4ax^2 - 8x + 25$ має з віссю ОХ дві спільні точки?

Розв'язання.

Даний квадратний тричлен має два різних дійсних корені, якщо виконуються умови: $\begin{cases} 4a \neq 0 \\ \frac{D}{4} = 16 - 100a > 0 \end{cases}$.

Розв'язком системи є проміжок $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$.

Відповідь. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$

Приклад 10. При яких значеннях параметра a квадратний

тричлен $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k+7$ можна представити у вигляді повного квадрата?

Розв'язання.

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна представити у вигляді $a(x - x_0)^2$, якщо його корені рівні $x_1 = x_2 = x_0$. Тобто $D = 0$. В даному випадку $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0$. Розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо $k = -\frac{22}{3}$ і $k = 2$.

Відповідь. $k = -\frac{22}{3}$, $k = 2$.

Приклад 11. Знайти значення параметра a , при яких нерівність

$(2a+1)x^2 + (a+2)x + \frac{3}{4} \geq 0$ виконується для всіх x .

Розв'язання.

Графік квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ розміщений не нижче осі OX при виконанні умов: $\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0. \end{cases}$

У даній задачі умови мають вигляд: $\begin{cases} 2a+1 > 0 \\ (a+2)^2 - 3(2a+1) \leq 0. \end{cases}$

Розв'язком цієї системи є $a = 1$.

Відповідь. $a=1$

Завдання, які можна розв'язувати як додаткові на занятті, для індивідуальної роботи, або для домашньої роботи:

Розв'язати рівняння та нерівності:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $(a^2 - 6a + 5)x = a - 1;$ | 4) $\frac{x-a}{x^2-4x+3} = 0$ |
| 2) $\frac{x-2}{x+a} = 0;$ | 5) $\frac{x^2-4x+3}{x-a} = 0$ |
| 3) $\sqrt{x} = -a$ | 6) $a\sqrt{x} > 0$ |

3.4 Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена належали певному інтервалу відносно чисел m і n на числовій прямій.

1. Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена були більшими m
2. Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена були меншими m
3. Знаходження умови належності коренів квадратного тричлена певному інтервалу залежно від значення параметра.

Приклад 1. При яких значеннях параметра b корені рівняння

$\frac{x}{b+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3b-4}{(b+1)(x-2)}$ більші числа 10.

Розв'язання.

При $(b+1)(x-2) \neq 0$ рівняння рівносильне такому рівнянню:

$$x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0. \text{ Звідки}$$

$$x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4}, \quad x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4}.$$

Тепер необхідно перевірити, чи немає таких значень b , при яких один з одержаних коренів дорівнює 2. Виявляється, що таке значення є. В цьому легко переконатися, якщо підставити в рівняння $x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0$ значення $x = 2$. При цьому одержуємо $b = -8$.

Другий розв'язок в цьому випадку дорівнює $\frac{-3b+4}{2}$ при $b = -8$, тобто

$$x = 14. \text{ Отже, при } b = -8 \text{ початкове рівняння має один розв'язок } x = 14.$$

При $b \neq -8$ і $b \neq -1$ рівняння має два розв'язки: $x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}$. Ці розв'язки дійсні при $b \leq -4, (b \neq -8)$ і при $b \geq 1$. При $b = -1$ рівняння немає змісту.

Корені рівняння, що більші числа 10:

$$1) x = 14 \text{ при } b = -8$$

2) При $b \neq -8$ і $b \neq -1$ рівняння має розв'язки $x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}$, тобто розв'яжемо нерівності:

$$-b - \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10 \text{ і } -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10.$$

Звідки:

$$\text{при } b > -6 \text{ справджується нерівність } -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10$$

$$\text{при } b < -6 \text{ справджується нерівність } -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10$$

Приклад 2. Знайти значення a , при якому один з коренів рівняння $x^2 - 2ax + 5 = 0$ в два рази менший від одного з коренів рівняння $x^2 + 4x - 4a = 0$

Приклад 3. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких корені рівняння $(a-2)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$ належать інтервалу $(-2; 1)$.

Розв'язання.

$$\text{Нехай } f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + a + 3. \quad x_0 = -\frac{a}{a-2}, \quad D = 4a^2 - 4(a-2)(a+3).$$

$$\text{Якщо } a = 2, \text{ то } f(x) = 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \in (-2; 1).$$

Якщо $a \neq 2$, то задача рівносильна виконанню умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{4} \geq 0, \\ -2 < x_0 < 1, \\ (a-2)f(-2) > 0, \\ (a-2)f(1) > 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - (a-2)(a+3) \geq 0, \\ \frac{a}{a-2} + 1 > 0, \\ \frac{a}{a-2} - 2 < 0, \\ (a-2)(a-5) > 0, \\ (a-2)(4a+1) > 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (5; 6].$$

$$\text{Відповідь. } a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup \{2\} \cup (5; 6].$$

Приклад 4. При яких значеннях параметра a корені рівняння $ax^2 + (2a-1)x + 1 = 0$ розташовані в інтервалі $(-1; 1)$?

Розв'язання Задача зводиться до розв'язання системи нерівностей:

$$\begin{cases} D > 0, \\ -1 < x_0 < 1, \\ af(1) > 0, \\ af(-1) > 0. \end{cases} \text{Відповідь: } a \in \left(\frac{1}{4}; 2\right).$$

Завдання для самоперевірки

Завдання для самоперевірки №1	
Розв'язати при всіх а рівняння $x^2 + ax + 9 = 0$	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $a \geq 36$ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}$, при $a < 36$ розв'язків немає ☐ При $a \geq 6$ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}$, при $a < 6$ розв'язків немає ☐ При $a \leq 6$ $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 36}$, при $a > 6$ розв'язків немає ☐ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 36}}{2}$ ☐ При $a \leq 3$ $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 9}$, при $a > 3$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №2	
Розв'язати при всіх а рівняння $x^2 - 2ax + 4 = 0$	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $a \geq 4$ $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4}$, при $a < 4$ розв'язків немає ☐ При $a \leq 2$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{4 - a^2}$, при $a > 2$ розв'язків немає ☐ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$ ☐ При $a \leq 4$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{4 - a}$, при $a > 4$ розв'язків немає ☐ При $a \geq 2$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$, при $a < 2$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №3	
Розв'язати при всіх а рівняння $2x^2 - bx + 8 = 0$	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $b \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{4}$, при $b < 8$ розв'язків немає ☐ При $b \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{4}$, при $b < 8$ розв'язків немає ☐ При $b \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{2}$, при $b < 8$ розв'язків немає ☐ При $b \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{2}$, при $b < 8$ розв'язків немає ☐ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 64}}{2}$

Завдання для самоперевірки №4	
Розв'язати при всіх b рівняння $x^2 - 4bx + b - 2 = 0$	Виберіть правильну відповідь: ☐ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{4b^2 - b + 2}$ ☐ При $b \leq 2$ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{2 - b}$, при $b > 2$ розв'язків немає ☐ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{4b^2 + 2}$ ☐ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{b^2 + 2}$ ☐ При $b \geq -2$ $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b + 2}$, при $b < -2$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №5	
Знайти всі a , при яких рівняння $a^2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2ax$ має рівно два різних кореня.	Виберіть правильну відповідь: ☐ $a < 13/12$ ☐ $a < -1, a > 13/12$ ☐ $a < -1, -1 < a < 1, 1 < a < 13/12$ ☐ $a < -1, -1 < a < 1, a \geq 13/12$ ☐ $a < -1, -1 < a < 13/12$

Завдання для самоперевірки №6	
Знайти всі p , при яких рівняння $px^2 + x + p = 2px$ має рівно два різних кореня.	Виберіть правильну відповідь: ☐ $p < 1/4$ ☐ $p < 0, p > 1/4$ ☐ $p < -1, -1 < p < 0, 0 < p < 1/4$ ☐ $p \geq 1/4$ ☐ $p < 0, 0 < p < 1/4$

Завдання для самоперевірки №7	
Знайти всі a , при яких рівняння $a^2x^2 - 2ax + 1 = ax^2 + x$ має рівно два різних кореня.	Виберіть правильну відповідь: ☐ $a < -1/8$ ☐ $a < -1, a > 1/8$ ☐ $-1/8 < a < 1, a > 1$ ☐ $a \geq -1/8$ ☐ $-1/8 < a < 0, 0 < a < 1, a > 1$

Завдання для самоперевірки №8	
Знайти всі a , при яких рівняння $x^2 - ax + a + 3 = 0$ має рівно два різних кореня і відстань між ними 3.	Виберіть правильну відповідь: ☐ $a = -2$ ☐ $a = -2, a = 7$ ☐ $a = -3, a = 2$ ☐ $a = -3, a = 7$ ☐ $a = 7$

Самостійна робота

В - I	В - II
1. Розв'язати при всіх a рівняння $x^2 + 10x + a = 0$ Відповідь: При $a \leq ?$ $x_1 = ?$ $x_2 = ?$ $(x_1 < x_2)$ При $a > ?$ розв'язків немає 2. Знайти всі a , при яких рівняння $x^2 - 2ax + 2a = 3 - 4x$ має рівно два різних кореня і відстань між ними дорівнює 1. $a_1 = ?$ $a_2 = ?$ Відповідь. $(a_1 < a_2)$	1. Розв'язати при всіх b рівняння $x^2 + 2x + b - 1 = 0$ Відповідь: При $b \leq ?$ $x_1 = ?$ $x_2 = ?$ $(x_1 < x_2)$ При $b > ?$ розв'язків немає 2. Знайти всі p , за яких рівняння $px^2 - x + p = 2px - x^2 - 1$ має рівно 2 різних кореня Відповідь. $p < ?$, $? < p < ?$

Завдання з підказкою

Приклад 1. Розв'язати при всіх a рівняння $x^2 + 2x - a = 0$.

Розв'язання

Дослідимо рівняння на існування розв'язків. Зручно знайти одну четверту частину дискримінанта $\frac{D}{4} = 1 + a$. В залежності від значень параметра a можливі три випадки:

Випадок 1. $a < -1$

Випадок 2. $a = -1$

Випадок 3. $a > -1$

Відповідь.

Приклад 2. Розв'язати при всіх b рівняння $x^2 + 2bx - 1 = 0$.

Розв'язання

Знайти одну четверту частину дискримінанта $\frac{D}{4} = b^2 + 1$. Оскільки квадрат будь-якого дійсного числа завжди є невід'ємним числом, то дискримінант буде додатнім числом при довільних значеннях параметра b . Отже, рівняння завжди буде мати два дійсних корені. Знайдемо їх:

$$x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 1}, \quad x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 1}.$$

Відповідь.

Приклад 3. Розв'язати при всіх p рівняння $x^2 - px + 4 = 0$.

Розв'язання

Дослідимо значення дискримінанта $D = p^2 - 4 \cdot 4 = p^2 - 16$. В залежності від значення дискримінанта можливі три випадки:

Випадок 1. $D < 0$

Випадок 2. $D = 0$

Випадок 3. $D > 0$

Відповідь.

Приклад 4. Розв'язати при всіх a рівняння $a^2x + 2x - 4 = 0$.

Розв'язання

У залежності від значення параметра a ми отримуємо різні рівняння. Якщо $a=0$, то рівняння стає лінійним, якщо $a \neq 0$ рівняння стає квадратним. В цьому випадку кількість розв'язків залежить від значення дискримінанта: $D = 2^2 - 4(-4)a = 4 + 16a = 4(1 + 4a)$. Дискримінант приймає значення 0, якщо $1+4a=0$, при цьому $a = -0,25$.

Відмітимо точки $a = -0,25$ та $a=0$ на координатній прямій a . В залежності від значення a треба розібрати 5 можливих випадків:

Випадок 1. $a < -0,25$

Випадок 2. $a = -0,25$

Випадок 3. $-0,25 < a < 0$

Випадок 4. $a = 0$

Випадок 5. $a > 0$

Відповідь.

Приклад 5. Розв'язати при всіх a рівняння $a^2x^2 + x - a = x^2 - ax + 1$.

Розв'язання

Перенесемо всі доданки із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком $a^2x^2 + x - a - x^2 + ax - 1 = 0$ і знайдемо коефіцієнти при однакових степенях x :

$(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x - (a + 1) = 0$. Застосуємо формулу перетворення різниці квадратів у добуток $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ і винесемо спільний множник $(a+1)$ за дужки $(a + 1)((a - 1)x^2 + x - 1) = 0$.

Якщо параметр $a = -1$, то рівняння зводиться до тотожності $0=0$. Отже, його розв'язками є всі дійсні числа.

Нехай $a \neq -1$, тоді $a + 1 \neq 0$. Поділивши обидві частини рівняння на $(a+1)$, отримаємо $(a-1)x^2 + x - 1 = 0$. В залежності від значень параметра a одержимо різного виду рівняння.

Якщо $a=1$, то рівняння стає лінійним. Якщо $a \neq 1$, то рівняння буде квадратним.

Обчислимо дискримінант рівняння: $D = 1 - 4(-1)(a-1) = 4a - 3$. Дискримінант перетворюється в нуль при $a = 0,75$. Відмітимо тепер на дійсній осі значення параметра $a = -1, a = 0,75, a = 1$ в порядку зростання. У залежності від значень параметра a можливі 7 випадків.

Приклад 6. Розв'язати при всіх b рівняння $bx^2 - 1 = b - x$.

Розв'язання.

Перенесемо всі доданки із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком $bx^2 - 1 - b + x = 0$ і запишемо по степеням x : $bx^2 + x - (1 + b) = 0$.

Якщо $b=0$, то рівняння стає лінійним. Якщо $b \neq 0$, то рівняння буде квадратним. Знайдемо його дискримінант

$D = 1 + 4b(1 + b) = (2b + 1)^2$. Дискримінант перетворюється в нуль, якщо $b = -0.5$, а в решті випадків він додатний. В залежності від значення параметра b розглянемо три можливі випадки:

Випадок 1. $b = 0$

Випадок 2. $b = -0.5$

Випадок 3. $b \neq 0$ і $b \neq -0.5$

Відповідь.

Приклад 7. Знайти всі p , при яких рівняння $p^2x^2 - x + 1 = 2px$ має рівно два різних корені.

Розв'язання

Віднімаємо від обох частин рівняння $2px$, отримуємо $p^2x^2 - x + 1 - 2px = 0$. Запишемо по степеням x : $p^2x^2 - (1 + 2p)x + 1 = 0$.

Скласти подальший алгоритм розв'язання, розглянути випадки:

Випадок 1. $p = 0$

Випадок 2. $p \neq 0$

Відповідь.

Приклад 8. Знайти всі a , при яких рівняння $x^2 + ax - a + 1 = 0$ має рівно два різних корені і відстань між ними дорівнює 1.

Розв'язання.

Рівняння є квадратним при всіх значеннях параметра a . Знайдемо дискримінант $D = a^2 - 4(-a+1) = a^2 + 4a - 4$. Рівняння має рівно два різних значення, якщо дискримінант додатний, тобто $D = a^2 + 4a - 4 > 0$. Запишемо розв'язки

квадратного рівняння: $x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2}$ і $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2}$.

Другий корінь більший першого, тому відстань між ними дорівнює:

$$x_2 - x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2} - \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2}.$$

$$x_2 - x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a - 4} + a + \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2}, \quad x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 + 4a - 4}.$$

Отже, задача зводиться до розв'язку рівняння $\sqrt{a^2 + 4a - 4} = 1$ відносно невідомого a та при обмеженні $a^2 + 4a - 4 > 0$. Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, одержимо $a^2 + 4a - 4 = 1$, що забезпечує умову $a^2 + 4a - 4 > 0$. Розв'яжемо одержане рівняння $a^2 + 4a - 5 = 0$, звідки

$$a_1 = -5 \text{ та } a_2 = 1$$

Завдання для самоперевірки

Завдання для самоперевірки №1	
1) Знайти всі значення параметра b , за яких рівняння $b^2 x^2 + bx - 6 = 3bx^2 + 3x - 2b$ має рівно один розв'язок	Виберіть правильну відповідь: ☐ $b = 0$ ☐ $b = 1/8, b = 3$ ☐ $b = 0, b = 1/8$ ☐ $b < 1/8$ ☐ Таких значень немає

Завдання для самоперевірки №2	
Розв'язати при всіх a рівняння $ax^2 + 3 = a - 3x$.	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $a \geq 0$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{a+3}{a}$, при $a < 0$ розв'язків немає ☐ При $a \leq 3/2$ $x = -1$, при $a > 3/2$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{a-3}{a}$. ☐ При $a = 0, a = 3/2$ $x = -1$, при $a \neq 0, a \neq 3/2$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{a-3}{a}$. ☒ При $a = 0$ $x = -1$, при $a \neq 0$ $x_1 = \frac{a-3}{a}$ и $x_2 = \frac{a+3}{a}$.

Завдання для самоперевірки №2	
Розв'язати при всіх b рівняння $2x^2 + b = bx^2 - 2x$.	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $b \leq 2$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{b-2}{b}$, при $b > 2$ розв'язків немає ☐ При $b \geq 1$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{b}{b-2}$, при $b < 1$ розв'язків немає ☐ При $b = 1$ $x = -1$, при $b \neq 1$ $x = \frac{b}{b-2}$ ☐ При $b \neq 1, b \neq 2$ $x_1 = -1, x_2 = \frac{b}{b-2}$, при $b = 1$ и $b = 2$ $x = -1$

3.5. Узагальнююче повторення

Приклад 1. Розв'язати відносно x рівняння

$$\frac{3mx - 5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}.$$

Розв'язання

По змісту задачі $(m-1)(x+3) \neq 0$, тобто $m \neq 1$, $x \neq -3$.

Помножимо обидві частини рівняння на $(m-1)(x+3) \neq 0$, отримаємо $(4m-9)x = 31-2m$.

Звідси при $m \neq 2,25$ $x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

Тепер необхідно перевірити, чи немає таких значень m , за яких знайдене значення x дорівнює -3 .

$$\frac{31-2m}{4m-9} = -3, \text{ тобто при } m = -4.$$

Таким чином, при $m \neq 1$, $m \neq 2,25$, $m \neq -0,4$ рівняння має єдиний корінь $x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

При $m = 2,25$ і $m = -0,4$ рівняння розв'язків не матиме. При $m = 1$ рівняння немає змісту.

Якщо підставити в дане рівняння $m = -0,4$, отримаємо рівняння

$$\frac{6x+25}{7(x+3)} + \frac{61}{7} = \frac{2x+7}{x+3}.$$

Отже, якщо $m = -0,4$ то дане рівняння матиме зміст, але коренів це рівняння немає, оскільки корінь $x = -3$ сторонній корінь.

Кожна з нерівностей виду $Ax > B$, $Ax < B$, $Ax \leq B$, або $Ax \geq B$, де A і B – дійсні числа або функції від параметрів, а x – дійсна змінна величина, називається лінійною нерівністю з однією змінною (x).

Наприклад, нерівність $(m-1)x < 5m$ лінійна відносно x .

При $m = 1$ x – будь-яке число, при $m > 1$ $x < \frac{5m}{m-1}$, при $m < 1$

$$x > \frac{5m}{m-1}.$$

Розв'яжемо нерівність $\frac{2x-m}{(m-2)(x+3)} - \frac{m}{m-2} < \frac{3}{x+3}$.

З даної умови слідує, що $m \neq 2$, $x \neq -3$.

Перетворимо дану нерівність до вигляду: $\frac{(m-2)x - (6-7m)}{(m-2)(x+3)} > 0$, потім:

$\frac{x - \frac{6-7m}{m-2}}{x+3} > 0$, яка рівносильна даній нерівності і зводиться до сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x > \frac{6-7m}{m-2}, \\ x > -3; \\ x < \frac{6-7m}{m-2}, \\ x < -3. \end{cases}$$

Для вибору розв'язку кожної з них порівняємо величини $\frac{6-7m}{m-2}$ і -3 . Для цього розглянемо різницю $\frac{6-7m}{m-2} - (-3) = -\frac{4m}{m-2}$.

$$-\frac{4m}{m-2} < 0, \text{ якщо } m < 0 \text{ і } m > 2; -\frac{4m}{m-2} > 0, \text{ якщо } 0 < m < 2;$$

$$-\frac{4m}{m-2} = 0 \text{ при } m = 0.$$

$$\text{Отже, } \frac{6-7m}{m-2} < -3, \text{ якщо } m < 0 \text{ і } m > 2; \frac{6-7m}{m-2} \geq -3, \text{ якщо } 0 \leq m < 2.$$

Звідси слідує розв'язок нерівності:

$$\text{Якщо } m < 0 \text{ і } m > 2; x \in \left(-\infty; \frac{6-7m}{m-2}\right) \cup (-3; \infty).$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{6-7m}{m-2}; \infty\right), \text{ якщо } 0 \leq m < 2.$$

4. Рівняння з параметрами, що містять знак модуля

Відпрацювання навичок розв'язування рівнянь з параметрами, що містять модуль алгебраїчним способом.

Приклад . Розв'язати рівняння залежно від параметра а

$$|3x - 4| = a + x$$

Розв'язання

$$|3x - 4| = a + x, |3x - 4| - x = a.$$

$$3x - 4 = 0, x = \frac{4}{3}. \text{ Якщо } x = \frac{4}{3}, \text{ то } a = -1\frac{1}{3}.$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{4}{3}} x \\ \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{4}{3}, \\ -3x + 4 - x = a \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{4}{3}, \\ 3x - 4 - x = a \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{4}{3}, \\ -4x = a - 4 \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{4}{3}, \\ 2x = a + 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{4}{3}, \\ x = -\frac{1}{4}a + 1 \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{4}{3}, \\ x = \frac{1}{2}a + 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Якщо $a < -1\frac{1}{3}$, то рівняння немає коренів; якщо $a = -1\frac{1}{3}$, то рівняння має один корінь $x = \frac{4}{3}$; якщо $a > -1\frac{1}{3}$, то рівняння має два корені $x = \frac{1}{2}a + 2$ та $x = -\frac{1}{4}a + 1$.

Відповідь.

Якщо $a < -1\frac{1}{3}$: немає коренів;

якщо $a = -1\frac{1}{3}$: $x = \frac{4}{3}$;

якщо $a > -1\frac{1}{3}$: $x = \frac{1}{2}a + 2$, $x = -\frac{1}{4}a + 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння залежно від параметра а

$$2x - |x| + |x - 1| = a$$

Розв'язання

Якщо $a=1$, то рівняння має безліч коренів $[0; 1]$; якщо $a \neq 1$, то рівняння матиме один корінь, який знайдемо із систем

$$\begin{cases} 2x + 1 = a, \\ a < 1; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x - 1 = a, \\ a > 1. \end{cases}$$

Отже, $x = \frac{a-1}{2}$ при $a < 1$, $x = \frac{1+a}{2}$ при $a > 1$.

Відповідь. Якщо $a=1$: $x \in [0; 1]$;

якщо $a < 1$: $x = \frac{a-1}{2}$;

якщо $a > 1$: $x = \frac{1+a}{2}$.

Завдання для самоперевірки

Завдання для самоперевірки №1	
Розв'язати при всіх a рівняння: $ x + a = x - a - ax$.	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $a < 0$ $x = 0$, при $a = 0$ $x \leq -2$, при $0 < a < 2$ розв'язків немає при $a = 2$ $x \geq 2$, при $a > 2$ $x = 2$. ☐ При $a < 0$ $x \leq -2$, при $a = 0$ $x \leq 0$, при $0 < a < 2$ розв'язків немає при $a = 2$ $x = 0$, при $a > 2$ $x = 2$. ☐ При $a < 0$ $x = 0$, при $a = 0$ $x \leq 0$, при $0 < a < 2$ розв'язків немає при $a = 2$ $x \geq 2$, при $a > 2$ $x = 2$. ☐ При $a < 0$ $x = 0$, при $a = 0$ $x \geq 0$, при $0 < a < 2$ розв'язків немає при $a = 2$ $x \leq -2$, при $a > 2$ $x = -2$.

Завдання для самоперевірки №2	
Розв'язати при всіх p рівняння: $ x - p = px - x - p$	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $p < 0$ $x = 2$, при $p = 0$ $x \geq 2$, при $0 < p < 2$ розв'язків немає при $p = 2$ $x \leq 0$, при $p > 2$ $x = 0$. ☐ При $p < 0$ $x = 0$, при $p = 0$ $x \leq 0$, при $0 < p < 2$ розв'язків немає при $p = 2$ $x \geq 2$, при $p > 2$ $x = 2$. ☐ При $p < 0$ $x \geq 2$, при $p = 0$ $x \leq 0$, при $0 < p < 2$ $x = 0$, при $p = 2$ $x = 2$, при $p > 2$ розв'язків немає ☐ При $p < 0$ $x = 0$, при $p = 0$ розв'язків немає при $0 < p < 2$ $x \leq 0$, при $p = 2$ $x = 2$, при $p > 2$ $x \geq 2$.

Завдання для самоперевірки №3	
Розв'язати при всіх a рівняння: $ 3x + 2a = 3x - 2a - 6$	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $a < 0$ $x = 0$, при $a = 0$ $x \geq 0$, при $0 < a < 1$ розв'язків немає при $a = 1$ $x \leq -2/3$, при $a > 1$ $x = -2/3$. ☐ При $a < 0$ $x \leq -2$, при $a = 0$ $x \leq 0$, при $0 < a < 1$ розв'язків немає при $a = 1$ $x = 0$, при $a > 1$ $x = -2/3$. ☐ При $a < 0$ $x = 0$, при $a = 0$ $x \leq 0$, при $0 < a < 1$ розв'язків немає при $a = 1$ $x = -2/3$, при $a > 1$ $x = 2$. ☐ При $a < 0$ $x \geq 2$, при $a = 0$ $x \leq 0$, при $0 < a < 1$ $x = 2$, при $a = 1$ $x = 0$, при $a > 1$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №4

Знайти всі a , при яких
рівняння
 $|x^2 + a + 1| = 4x$ ма
є рівно один розв'язок

Виберіть правильну відповідь

- ☐ $a = -2$
☐ $a = -1$
☐ $a = 3$
☐ $a = 4$
☐ Таких значень немає

Завдання для самоперевірки №5

Розв'язати при всіх b
рівняння
 $|x - b| = x - 3$

Виберіть правильну відповідь

- ☐ При $b > 2$ рішення нет, при $b = 2$ $x \geq 3$, при $b < 2$ $x = (b + 3)/2$.
☐ При $b > 3$ рішення нет, при $b = 3$ $x \geq 3$, при $b < 3$ $x = (b + 3)/2$.
☐ При $b > 2$ $x = (b + 3)/2$, при $b = 2$ $x \geq 3$, при $b < 2$ розв'язків немає
☐ При $b > 3$ $x = (b + 3)/2$, при $b = 3$ $x \geq 3$, при $b < 3$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №5

Розв'язати при всіх a
рівняння
 $|x - 2| = 2x - 3a - 1$

Виберіть правильну відповідь

- ☐ При $a < 1$ $x = 3a - 1$, при $a \geq 1$ $x = a + 1$.
☐ При $a < 1$ $x = a + 1$, при $a \geq 1$ $x = 3a - 1$.
☐ При $a < 3$ $x = 3a - 6$, при $a \geq 3$ $x = 2a - 3$.
☐ При $a < 2$ $x = a + 1$, при $a \geq 2$ $x = 3a - 1$.

Самостійна робота

Розв'язати при всіх a рівняння
 $|x - 1| = 2x - a + 2$.

Відповідь.

При $a \geq ?$ $x = ?$

при $a < ?$ $x = ?$

Знайти всі значення параметра a ,
при яких рівняння $|x^2 + 2a| = 6x$
має рівно один розв'язок.

Відповідь. $a = ?$

Завдання з підказкою

Приклад 1. Розв'язати при всіх a рівняння: $|x - 1| = 2x + a$.

Розв'язання:

У залежності від знака виразу $x - 1$ розглянемо два випадки:

Випадок 1. $x - 1 \geq 0$

Випадок 2. $x - 1 < 0$

Відповідь.

Приклад 2. Розв'язати при всіх b рівняння: $|x + b| = x - 2$.

Розв'язання:

Оскільки в правій частині параметра немає, то зручно розглянути два випадки в залежності від знаку правої частини $x - 2$:

Випадок 1. $x - 2 < 0$

Випадок 2. $x - 2 \geq 0$

Відповідь.

Приклад 3. Розв'язати при всіх p рівняння: $|x - p| = px - 1$.

Розв'язання:

У залежності від знаку виразу $x - p$ розглянемо 2 випадки:

Випадок 1. $x - p \geq 0$

Випадок 2. $x - p < 0$

Відповідь.

Приклад 4. Знайти всі a , при яких рівняння $|x^2 + a| = 2x$ має рівно один розв'язок.

Розв'язання:

У залежності від знаку виразу розглянемо 2 випадки:

В залежності від знаку правої частини рівняння $2x$ можливі два випадки:

Випадок 1. $2x < 0$

Випадок 2. $2x \geq 0$

Відповідь.

5. Рациональні рівняння з параметрами

Приклад 1. У залежності від значення параметра a визначити число коренів рівняння $x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$.

Розв'язання.

Дане рівняння є раціональним рівнянням четвертого степеня, отже, може мати не більше 4 коренів. Нехай $y = x^2$, перепишемо рівняння у вигляді $y^2 + (1 - 2a)y + (a^2 - 1) = 0$.

Вихідне рівняння має 4 корені, якщо останнє квадратне рівняння має 2 різні додатні корені. Достатні умови цього записані у вигляді системи (вітки параболи направлені в гору):

$$\begin{cases} D = 5 - 4a > 0, \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a - 1) > 0, \text{ звідки слідує: } a \in (1; \frac{5}{4}). \\ f(0) = a^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

Якщо один із коренів $y_1 = 0$, а другий корінь $y_2 > 0$, то вихідне рівняння буде мати 3 корені. Запишемо умови цього випадку:

$$\begin{cases} D = 5 - 4a > 0, \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a - 1) > 0, \text{ звідки слідує, що } a = 1. \\ f(0) = a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Вихідне рівняння по змінній x буде мати 2 корені $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_2}$, якщо один із коренів $y_1 < 0$, а другий корінь $y_2 > 0$. Умовою цього випадку буде нерівність $f(0) < 0$, або $a \in (-1; 1)$.

Крім цього, якщо $D = 0$ ($a = \frac{5}{4}$), то вихідне рівняння також має 2 корені

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $y_1 = 0$, а другий корінь $y_2 < 0$. Тоді вихідне рівняння по змінній x буде мати єдиний корінь $x = 0$. Достатньою умовою цього є система:

$$\begin{cases} f(0) = a^2 - 1 = 0, \\ y_2 = \frac{1}{2}(2a - 1) < 0; \end{cases} \quad a = -1.$$

І нарешті, вихідне рівняння не буде мати розв'язків в двох випадках: або коли обидва корені від'ємні $y_1 < 0$, і другий корінь $y_2 < 0$; або коли коренів у квадратного рівняння взагалі немає, тобто $D < 0$. Достатня умова відсутності коренів визначається сукупністю

$$\begin{cases} D = 5 - 4a < 0 \\ \begin{cases} D = 5 - 4a > 0 \\ y_2 = \frac{1}{2}(2a - 1) < 0 \\ f(0) = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{4}; +\infty).$$

Відповідь.

Якщо $1 < a < \frac{5}{4}$: 4 корені; якщо $a = 1$: 3 корені; якщо $a = -1$: 1 корінь; якщо $-1 < a < 1$, $a = \frac{5}{4}$: 2 корені; якщо $a < -1$, $a > \frac{5}{4}$: коренів немає.

Приклад 2. При яких значеннях параметра a нерівність

$$x + \frac{7a^2 - a - 2}{x - a} < -7a \quad \text{не має розв'язків, більших 1?}$$

Розв'язання.

Приведемо нерівність до вигляду $\frac{x^2 + 6ax - a - 2}{x - a} < 0$. Оскільки дискримінант чисельника $\frac{D}{4} = 9a^2 + a + 2 > 0$ для будь-якого a , запишемо рівносильну нерівність $\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x - a} < 0$, де

$$x_1 = -3a - \sqrt{9a^2 + a + 2}; \quad x_2 = -3a + \sqrt{9a^2 + a + 2}.$$

Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів, приходимо до висновку, що умова задачі буде виконуватися тільки при такому розміщенні точок x_1 , x_2 , a на осі абсцис, при якому сумісна система нерівностей:

$$\begin{cases} x_2 \leq 1, \\ a \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо відповідь: $a \in [\frac{1}{5}; 1]$.

Відповідь. $a \in [\frac{1}{5}; 1]$

Завдання для самоперевірки

Завдання для самоперевірки №1	
Розв'язати рівняння $\frac{3a}{x-4} - x = 0$ при всіх a. Вибрати правильну відповідь:	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $-4/3 < a < 32/3$ і $32/3 < a$ $x = -2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = 32/3$ $x = -8$, при $a = -4/3$ $x = -2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає ☐ При $a > -4/3$ $x = -2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = -4/3$ $x = -2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає ☐ При $a > -4/3$ $x = 2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = -4/3$ $x = 2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає ☐ При $-4/3 < a < 0$ і $0 < a$ $x = 2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = 0$ $x = 0$, при $a = -4/3$ $x = 2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №2	
Розв'язати рівняння $\frac{3a}{x-4} - x = 0$ при всіх a	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $-4/3 < a < 32/3$ і $32/3 < a$ $x = -2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = 32/3$ $x = -8$, при $a = -4/3$ $x = -2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає ☐ При $a > -4/3$ $x = -2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = -4/3$ $x = -2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає ☐ При $a > -4/3$ $x = 2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = -4/3$ $x = 2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає ☐ При $-4/3 < a < 0$ і $0 < a$ $x = 2 \pm \sqrt{4+3a}$, при $a = 0$ $x = 0$, при $a = -4/3$ $x = 2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №3	
Розв'язати рівняння при всіх p $\frac{4p}{x+4} + x = 0$	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $p < 1$ $x = -2(1 \pm \sqrt{1-p})$, при $p = 1$ $x = -2$, при $p > 1$ розв'язків немає ☐ При $p < 0$ і $0 < p < 1$ $x = -2(1 \pm \sqrt{1-p})$, при $p = 0$ $x = 0$, при $p = 1$ $x = -2$, при $p > 1$ розв'язків немає ☐ При $-1 < p < 0$ і $p > 0$ $x = -2(1 \pm \sqrt{1+p})$, при $p = 0$ $x = 0$, при $p = -1$ $x = -2$, при $p < -1$ розв'язків немає ☐ При $p < -3$ і $-3 < p < 1$ $x = -2(1 \pm \sqrt{1-p})$, при $p = -3$ $x = -6$, при $p = 1$ $x = -2$, при $p > 1$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №4

Розв'язати рівняння

$$\frac{12a}{x+6} - x = 0 \quad \text{при всіх } a.$$

Виберіть правильну відповідь:

- ☐ При $a > -3/4$ $x = -3 \pm \sqrt{9+12a}$,
при $a = -3/4$ $x = -3$, при $a < -3/4$ розв'язків немає
- ☐ При $a > -4/3$ $x = -2 \pm \sqrt{4+3a}$,
при $a = -4/3$ $x = -2$, при $a < -4/3$ розв'язків немає
- ☐ При $a > -4/3$ $x = -3 \pm \sqrt{4+3a}$,
при $a = -4/3$ $x = -3$, при $a < -4/3$ розв'язків немає
- ☐ При $-3/4 < a < 0$ і $0 < a$ $x = -3 \pm \sqrt{9+12a}$,
при $a = 0$ $x = 0$, при $a = -3/4$ $x = -3$, при $a < -3/4$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №5

Розв'язати рівняння

$$\frac{x}{2x-a} + \frac{1}{x+2} = 0$$

при всіх a .

Виберіть правильну відповідь:

- ☐ При $a > 2$ і $-2 < a < 2$ $x = -2 \pm \sqrt{2+a}$,
при $a = 2$ $x = -4$, при $a \leq -2$ розв'язків немає
- ☐ При $a > 1$ і $-3 < a < 1$ $x = -2 \pm \sqrt{3+a}$,
при $a = 1$ $x = -4$, при $a \leq -3$ розв'язків немає
- ☐ При $a > 0$ і $-4 < a < 0$ $x = -2 \pm \sqrt{4+a}$,
при $a = 0$ $x = -4$, при $a \leq -4$ розв'язків немає
- ☐ При $a > -1$ і $-5 < a < -1$ $x = -2 \pm \sqrt{5+a}$,
при $a = -1$ $x = -4$, при $a \leq -5$ розв'язків немає

Завдання для самоперевірки №6

Розв'язати рівняння

$$\frac{1-a}{x+3} + 1 = 0 \quad \text{при всіх } a.$$

Вибрати правильну відповідь:

Виберіть правильну відповідь:

- ☐ При $a = -1$ розв'язків немає, при $a \neq -1$ $x = a - 2$.
- ☐ При $a = 0$ розв'язків немає, при $a \neq 0$ $x = a - 2$.
- ☐ При $a = -1$ розв'язків немає, при $a \neq -1$ $x = -a - 4$.
- ☐ При $a = 1$ розв'язків немає, при $a \neq 1$ $x = a - 4$.

Завдання для самоперевірки №7

Розв'язати рівняння

$$\frac{a+1}{x+a+1} - \frac{3}{x+3} = 0$$

при всіх a .

Виберіть правильну відповідь:

- ☐ При $a = 2$ $x \neq 3$, при $a \neq 2$ $x = 0$.
- ☐ При $a = 2$ $x \neq 3$, при $a = 0$ розв'язків немає, при $a \neq 0$, $a \neq 2$ $x = 0$.
- ☐ При $a = -1$ розв'язків немає, при $a = 2$ $x \neq -3$, при $a \neq -1$, $a \neq 2$ $x = 0$.
- ☐ При $a = -1$ розв'язків немає, при $a \neq -1$ $x = 0$.

Завдання для самоперевірки №7	
Розв'язати рівняння $\frac{b}{x+b} - \frac{2}{x+2} = 0$ при всіх b .	Виберіть правильну відповідь: ☐ При $b = -1$ $x \neq 2$, при $b \neq -1$ $x = 0$. ☐ При $b = 2$ $x \neq -2$, при $b = 1$ розв'язків немає, при $b \neq 2, b \neq 0$ $x = 0$. ☐ При $b = -2$ $x \neq -2$, при $b = 0$ розв'язків немає, при $b \neq -2, b \neq 0$ $x = 0$. ☐ При $b = 2$ $x \neq -2$, при $b = 0$ розв'язків немає, при $b \neq 2, b \neq 0$ $x = 0$.

Самостійна робота

В - I	В - II
Розв'язати рівняння $\frac{1+2a}{2x+3} + 1 = 0$ при всіх a	Розв'язати рівняння $\frac{1+a}{x-5} - 1 = 0$ при всіх a

Завдання з підказкою

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{a}{x-1} + 1 = 0$ при всіх a
Розв'язання.

Оскільки знаменник дробу $\frac{a}{x-1}$ не може приймати нульових значень, то отримуємо обмеження $x - 1 \neq 0$, або $x \neq 1$. Множимо обидві частини рівняння на $x - 1$, знаходимо $a + (x - 1) = 0$. Віднімаємо від обох частин рівняння $a - 1$, маємо $x = a - 1$. Оскільки $x \neq 1$, то $a - 1 \neq 1$, отже, $a \neq 2$.
Відповідь.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{b}{x-b} + \frac{1}{x+1} = 0$ при всіх a .
Розв'язання.

Знаменники в дробах не можуть перетворюватися в нуль, тому запишемо обмеження $x - b \neq 0$ і $x + 1 \neq 0$, або $x \neq b$ і $x \neq -1$. Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник $(x - b)(x + 1)$, отримаємо $b(x + 1) + (x - b) = 0$. Розкривши дужки і спростивши вираз отримуємо $bx + x = 0$. Виносимо за дужки x : $(b + 1)x = 0$.

У залежності від значення параметра b можливі два випадки:

Випадок 1. $b + 1 = 0$

Випадок 2. $b + 1 \neq 0$

Відповідь.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{p}{x-2} + x = 0$ при всіх p .

Розв'язання.

Оскільки знаменник дробу $\frac{p}{x-2}$ не може приймати нульових значень, то отримали обмеження $x - 2 \neq 0$, $x \neq 2$. Множимо обидві частини рівняння на $x - 2$, маємо $p + x(x - 2) = 0$. Розкриваючи дужки, запишемо квадратне рівняння $x^2 - 2x + p = 0$. Обчислимо одну четверту частину дискримінанта $\frac{1}{4}D = 1 - p$

У залежності від значення параметра p можливі три випадки:

Випадок 1. $p > 1$

Випадок 2. $p = 1$

Випадок 2. $p < 1$

Відповідь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{x-1}{2x+a} + \frac{1}{x+1} = 0$ при всіх a .

Розв'язання.

Знаменники в дробах $\frac{x-1}{2x+a}$, $\frac{1}{x+1}$ не можуть перетворюватися в нуль, тому маємо обмеження: $2x + a \neq 0$ і $x + 1 \neq 0$, або $x \neq -\frac{1}{2}a$ і $x \neq -1$.

Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник

$(2x + a)(x + 1)$, отримуємо $(x - 1)(x + 1) + (2x + a) = 0$. Застосуємо формулу для різниці квадратів і розкриємо дужки, отримали квадратне рівняння $x^2 + 2x + a - 1 = 0$. Обчислимо одну четверту частину дискримінанта рівняння $\frac{1}{4}D = 1 - (a - 1) = 2 - a$.

У залежності від значення параметра a можливі три випадки:

Випадок 1. $a > 2$

Випадок 2. $a = 2$

Випадок 2. $a < 2$

Відповідь.

6. Графічні способи розв'язування задач з параметрами

Приклад 1. Знайти всі значення параметра a за яких графіки функцій

$$y_1 = \frac{|x+2|}{x+2} \quad y_2 = |x-a|$$

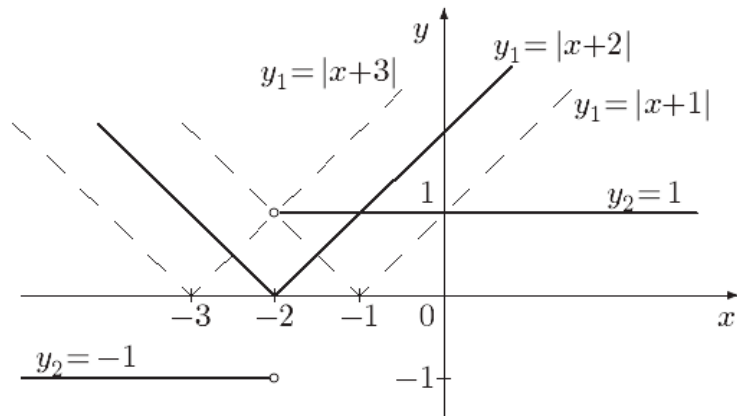
мають одну спільну точку.

Розв'язання.

Побудуємо в одній координатній площині графіки даних функцій.

$$y_1 = \begin{cases} 1, & x > -2 \\ -1, & x < -2 \end{cases}$$

Графік складається із двох променів, паралельних осі OX і не існує при x дорівнює -2 . Графік функції $y_2 = |x - a|$ отримаємо із графіка $y = |x|$ паралельним перенесенням вліво, якщо $a < 0$ і вправо якщо $a > 0$.



З малюнка слідує, що графіки мають одну спільну точку, якщо $a \in (-3; -1]$. Якщо $a = -3$, спільних точок немає, оскільки графік $y_2 = |x+3|$ проходить через виокоту точку y_1 .

Відповідь. $a \in (-3; -1]$.

1) При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + 4|x - a| \geq a^2$ справедлива для всіх значень x ?

Розв'язання

Якщо $x \geq a$, то дана нерівність рівносильна нерівності $x^2 + 4(x - a) - a^2 \geq 0$ або $(x - a)(x - (-a - 4)) \geq 0$.

Остання квадратна нерівність буде справедлива для всіх x з проміжку $x \geq a$, якщо виконується умова $a \geq -a - 4$, тобто $a \geq -2$.

Якщо $x < a$, то по аналогії з попереднім випадком переходимо до нерівності $(x - a)(x - (4 - a)) \geq 0$, яка справедлива для усіх x із розглядуваного проміжку за умови $a \leq 4 - a$, тобто $a \leq 2$.

Відповідь $a \in [-2; 2]$.

Приклад 2. В залежності від значення параметра a розв'язати нерівність $a - x > |1 - |x||$.

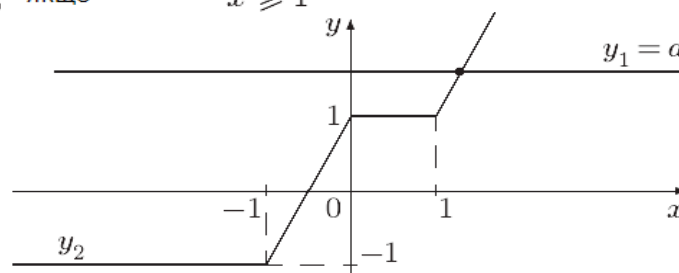
Розв'язання.

Перепишемо дану нерівність у вигляді $a > x + ||x| - 1|$.

Розглянемо дві функції $y_1 = a$ (графік – пряма, паралельна осі Ox) і $y_2 = x + ||x| - 1|$.

Другу функцію, розкриваючи модулі, можна записати так:

$$y_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < -1 \\ 2x + 1, & \text{якщо } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$$



Графіком $y_2(x)$ є ламана, зображена на малюнку. Розв'язком нерівності будуть ті значення x , за яких точки графіка $y_1 = a$ будуть розміщені вище точок графіка $y_2(x)$. На основі малюнка одержуємо, що якщо $a \leq -1$ таких точок немає, а якщо $a \in (-1; 1)$, то це точки виду $a > 2x + 1$, тобто $x < \frac{a-1}{2}$; якщо $a=1$, то розв'язки отримуємо із нерівності $a > 2x - 1$, звідки $x < \frac{a+1}{2}$.

Відповідь

Якщо $a \leq -1$: розв'язків немає ,
якщо $-1 < a \leq 1$: $x < \frac{a-1}{2}$,
якщо $a > 1$: $x < \frac{a+1}{2}$.

Приклад 3. Вказати всі значення параметра $a \neq 0$, при яких графіки функцій $y_1 = |x^2 + 3ax|$ та $y_2 = -3a$ мають тільки дві спільні точки.

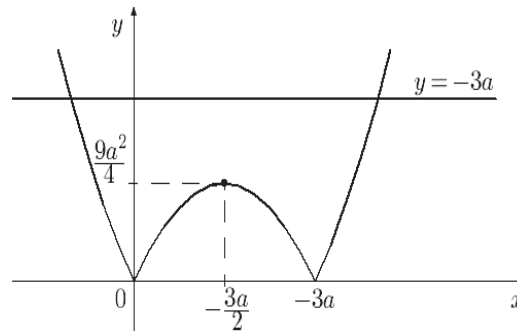
Розв'язання.

Перш за все відмітимо, що рівняння $|x^2 + 3ax| = -3a$ може мати розв'язки тільки при $a < 0$ ($a \neq 0$ за умовою). Графік

$y_1 = |x^2 + 3ax|$ отримаємо з параболи $y = x^2 + 3ax$ відображенням від'ємної частини симетрично осі Ox . Корені цієї параболи $x_1 = 0$ та $x_2 = -3a > 0$, вершина знаходиться в точці $x_v = -\frac{3a}{2} > 0$ і

$$y_v = \left| \left(-\frac{3a}{2}\right)^2 - 3a \cdot \frac{3a}{2} \right| = \frac{9a^2}{4}.$$

Графіком $y_2 = -3a$ є пряма, паралельна осі Ox .



З малюнка слідує, що графіки даних функцій мають дві спільні точки ($a \neq 0$) при умові, що $-3a > y_v \Rightarrow -3a > \frac{9a^2}{4} \Rightarrow 3a^2 + 4a < 0$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right).$$

Відповідь $a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$.

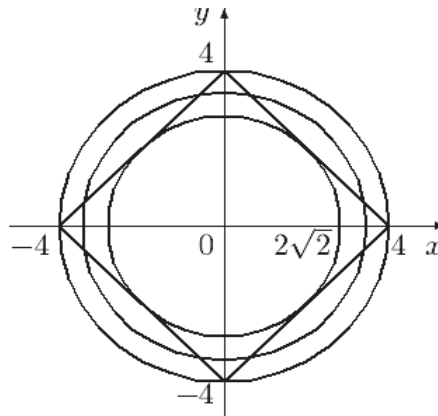
Приклад 4. В залежності від значення параметра a розв'язати систему

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

Розв'язання.

З геометричної точки зору кількість розв'язків системи – це число точок перетину при кожному фіксованому значенні параметра a кривих, заданих рівняннями системи.

Розглядуємо в першому рівнянні 4 випадки і розкриваючи модулі, отримаємо, що це рівняння задає квадрат (див. мал.). Друге рівняння – це сімейство кіл радіуса $\sqrt{a}$ ($a > 0$) з центром в початку координат. Якщо $a=0$, то коло вироджується в точку.



Із малюнка випливає, що коли коло дотикається квадрата всередині, тобто якщо $\sqrt{a} = 2\sqrt{2}$ ($a=8$) і якщо $\sqrt{a} = 4$ ($a=16$) (коло проходить через вершини квадрата) система має 4 розв'язки.

Якщо $8 < a < 16$ спільних точок у кола і квадрата 8.

Якщо $a < 8$ і $a > 16$ розв'язків немає.

Відповідь

Якщо $a \in (-\infty; 8) \cup (4; \infty)$: розв'язків немає;

Якщо $a=8$; $a=16$: 4 розв'язки;

Якщо $a \in (8; 16)$: 8 розв'язків.

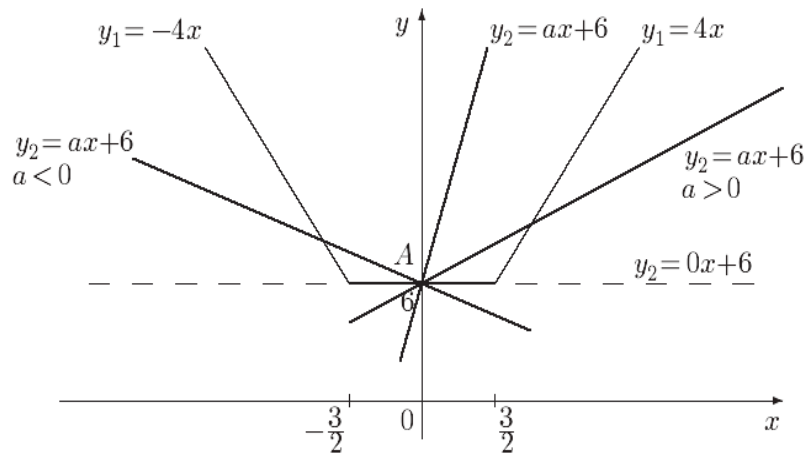
Приклад 5. В залежності від значення параметра a знайти розв'язки рівняння $|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6$.

Розв'язання.

З геометричної точки зору розв'язки рівняння – точки перетину кривих, що задаються лівою і правою частиною рівняння.

Розкриваючи модулі в лівій частині рівняння, отримаємо $y_1 = |2x + 3| + |2x - 3|$ – це ламана лінія (див. мал.) Права частина $y_2 = ax + 6$ задає на площині сімейство прямих, що проходять через точку $A(0;6)$ і які мають змінний кут нахилу до осі Ox $\operatorname{tg} \alpha = a$.

З малюнка видно, що при $a = 0$ ($\alpha = 0^\circ$) ламана і пряма мають безліч точок перетину $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.



Права частина ламаної має рівняння $y_1 = 4x$ ($\operatorname{tg} \alpha = 4$), тому при зміні параметра $a \in (0; 4)$ ламана і прямі із сімейства мають дві точки перетину: одна з них $x=0$, а друга знаходиться з рівняння $ax + 6 = 4x$, $x = \frac{6}{4-a}$.

Якщо $a=4$ графіки $y_1 = 4x$ і $y_2 = ax + 6$ паралельні, точка перетину з ламаною тільки одна: $x=0$.

В сімействі кривих збільшується кут нахилу до 90° , тому точка перетину з ламаною тільки одна: $x=0$.

Міркуючи аналогічно, маємо, що якщо $a \in (-4; 0)$ буде два розв'язки:

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{6}{a+4}$, а якщо $a \in (-\infty; -4]$ - один розв'язок $x = 0$.

Відповідь Якщо $a \in (-\infty; -4]$: $x = 0$,

Якщо $a \in (-4; 0)$: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{6}{a+4}$,

якщо $a = 0$: $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$,

якщо $a \in (0; 4)$: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{6}{a+4}$,

якщо $a \in (4; +\infty)$: $x = 0$.

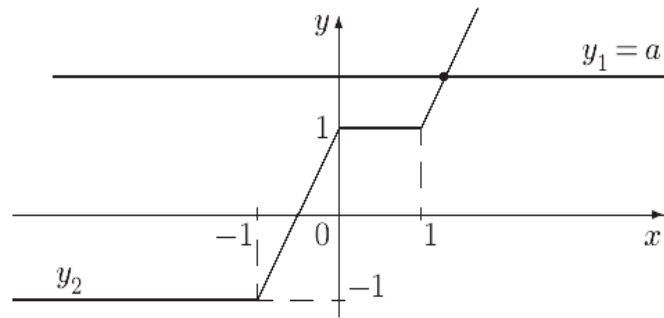
Приклад 6. . В залежності від значення параметра a розв'язати нерівність $a - x > |1 - |x||$.

Розв'язання.

Перепишемо дану нерівність у вигляді $a > x + |1 - |x||$. Розглянемо дві функції $y_1 = a$ (графік – пряма, паралельна осі Ox) і

$y_2 = x + |1 - |x||$. Другу функцію, розкриваючи модулі, можна записати так:

$$y_2 = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < -1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$



Графіком функції $y_2(x)$ є ламана, зображена намалюнку. Розв'язками нерівності будуть ті значення x , за яких точки графіка $y_1 = a$, що лежать вище точок графіка $y_2(x)$. З малюнка отримуємо, що якщо $a \leq -1$, таких точок немає, якщо $a \in (-1; 1)$ - це точка виду

$a > 2x + 1$, тобто $x < \frac{a-1}{2}$; якщо $a = 1$, то розв'язком є проміжок $x < 0$, а якщо $a > 1$ розв'язок отримуємо із нерівності $a > 2x - 1$, тобто $x < \frac{a+1}{2}$.

Відповідь. Якщо $a \leq -1$: розв'язків немає;

якщо $a \in (-1; 1]$: $x < \frac{a-1}{2}$;

якщо $a > 1$: $x < \frac{a+1}{2}$.

Вправи для самостійного розв'язання

Залежно від параметра розв'яжіть рівняння:

№ з/п	Рівняння	Відповідь.
1.	Вкажіть всі значення параметра $a \neq 0$, за яких графіки функцій $y = x^2 - 2ax $ і $y = 3a$ мають тільки дві спільні точки.	$a \in (0; 3)$
2.	Вкажіть всі значення параметра $a \neq 0$, за яких графіки функцій $y = 3x^2 + ax $ і $y = -\frac{a}{6}$ мають тільки дві спільні точки.	$a \in (-2; 0)$
3.	Вкажіть всі значення параметра a , за яких графіки функцій $y = \frac{ x+7 }{x+7}$ і $y = (x+a)^2$ мають одну спільну точку.	$a \in [6; 8)$
4.	Вкажіть всі значення параметра a , за	$a \in [-6; -4)$.

	яких графіки функцій $y = \frac{x-5}{ x-5 }$ і $y = x + a$ мають одну спільну точку.	
5.	Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, за якого система нерівностей $\begin{cases} x + 4 (x + 2) \geq 0, \\ \sqrt{a - x} > 0. \end{cases}$ немає розв'язків.	$a = -4$
6.	У залежності від значення параметра a розв'яжіть рівняння $x - a + x - 2a = 3a$.	Якщо $a < 0$: розв'язків немає; якщо $a = 0$: $x = 0$; якщо $a > 0$: $x_1 = 0, x_2 = 3a$.
7.	У залежності від значення параметра a розв'яжіть рівняння $x + x - 2 + a = 0$.	Якщо $a < -2$: $x_{1,2} = 1 \pm \frac{a}{2}$; якщо $a = -2$: $x \in [0; 2]$; якщо $a > -2$: розв'язків немає.
8.	У залежності від значення параметра a розв'яжіть нерівність $x - 3a - x + a < 2a$.	Якщо $a < 0$: $x < 2a$; якщо $a = 0$: розв'язків немає; якщо $a > 0$: $x > 0$.

4. Орієнтовне календарно-тематичне планування програми курсу за вибором «Задачі з параметрами»

4.1 Орієнтовне календарно-тематичне планування програми курсу за вибором «Задачі з параметрами» в 10-11 класах

№ з/п	Дата	Тема та зміст заняття	Кількість годин
10 клас (1 год на тиждень, всього 35 год)			
Тема 1		Раціональні та ірраціональні рівняння з параметрами та їх системи	15 год
1.		Параметр. Задачі з параметрами. Методи розв'язування задач з параметрами	1
2.		Дослідження та розв'язування лінійних рівнянь із параметрами	1
3.		Рівняння з параметрами, що зводяться до лінійних	1
4-5.		Дослідження системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими та параметром. Метод визначників	3
6.		Розв'язування квадратних рівнянь із параметрами та рівняння, що зводяться до них	1
7.		Властивості коренів квадратного рівняння. Теорема Вієта в задачах із параметрами	1
8.		Умови розміщення коренів квадратного рівняння відносно заданих точок	1
9-10.		Алгебраїчні рівняння вищих степенів. Властивості коренів третього та четвертого степеня	2
11.		Модуль. Рівняння з модулем. Модуль та параметри в рівняннях і системах рівнянь	1
12.		Розв'язування квадратних рівнянь, що містять змінну та параметри під знаком модуля	1
13-14.		Ірраціональні рівняння з параметрами	2
15.		Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок із теми: «Раціональні та ірраціональні рівняння з параметрами та їх системи»	1
Тема 2		Дослідження та розв'язування показникових, логарифмічних та тригонометричних рівнянь із параметрами	10
16.		Показникові рівняння з параметрами та методи їх розв'язування	1
17.		Розв'язування та дослідження показникових рівнянь із параметрами	1
18.		Логарифмічні рівняння з параметрами	1
19.		Методи розв'язування та дослідження логарифмічних рівнянь із параметрами	1
20.		Тригонометричні рівняння з параметрами	1
21.		Розв'язування типових тригонометричних рівнянь із параметрами	1
22.		Рівняння, що містять обернені тригонометричні	1

		функції	
23-24.		Системи рівнянь із параметрами	2
25.		Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок із теми: «Дослідження та розв'язування показникових, логарифмічних та тригонометричних рівнянь із параметрами»	1
Тема 3		Нерівності з параметрами	10
26.		Лінійні нерівності з параметрами	1
27-28.		Розв'язування нерівностей другого степеня з параметрами. Метод інтервалів	2
29.		Нерівності з параметрами, що містять модуль	1
30.		Ірраціональні нерівності з параметрами	1
31.		Показникові нерівності з параметрами та методи їх розв'язування	1
32.		Логарифмічні нерівності з параметрами та методи їх розв'язування	1
33-34.		Тригонометричні нерівності з параметрами	2
35.		Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок із теми: «Нерівності з параметрами»	1
№ з/п	Дата	Тема та зміст заняття	Кількість годин
11 клас			
(1 год на тиждень, всього 35 год)			
Тема 4		Функції та параметри. Властивості функцій у задачах із параметрами	12
1.		Область визначення та область значень функції Найбільше і найменше значення функції	1
2-3.		Властивості парних, непарних і періодичних функцій у задачах із параметрами	2
4-5.		Застосування монотонності та екстремальних властивостей функції під час розв'язування задач із параметрами	2
6.		Графічний метод розв'язування задач із параметрами. Координатна площина (x;y)	1
7.		Графічний метод розв'язування задач із параметрами. Координатна площина (x;a)	1
8-9.		Розв'язування задач із параметрами з застосуванням властивостей функції	2
10-11		Розв'язування задач із параметрами графічними методами	2
12.		Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок із теми: «Функції та параметри. Властивості функцій у задачах із параметрами»	1
Тема 5		Застосування похідної функції для розв'язування задач із параметрами	8
13.		Дотична до прямої, що є графіком функції з	1

		параметром	
14.		Критичні точки функції з параметрами	1
15-16.		Дослідження на монотонність та екстремум функції з параметром	2
17.		Найбільше та найменше значення функції на відрізьку	1
18-19.		Застосування похідної для дослідження рівнянь із параметрами	2
20.		Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок із теми: «Застосування похідної функції для розв'язування задач із параметрами»	1
Тема 6		Аналітичні та графічні методи розв'язування задач із параметрами	15
21-22.		Параметр і пошук розв'язків рівнянь, нерівностей та їх систем («розгалуження»)	2
23-24..		Параметр і кількість розв'язків рівнянь, нерівностей та їх систем	2
25-26.		Параметри і властивості розв'язків рівнянь, нерівностей та їх систем	2
27.		Метод пошуку необхідних умов	1
28.		Застосування симетрії аналітичних виразів	1
29.		Метод вибору «необхідної» точки	1
30-31.		Графічні методи розв'язування задач із параметрами	2
32-34.		Застосування різних прийомів розв'язування задач із параметрами	3
35.		Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок із теми: «Аналітичні та графічні методи розв'язування задач із параметрами»	1

4.2.Орієнтовне календарно-тематичне планування програми факультативного курсу «Задачі з параметрами» 9 класі

№ з/п	Дата	Тема та зміст заняття	Кількість годин
9 клас (1 год на тиждень, всього 34 год)			
Тема 1		Знайомство з параметрами	4 год
1 – 2		Поняття параметру і пошуку розв'язків рівнянь, нерівностей з параметрами	2
3 – 4		Параметр і кількість розв'язків рівнянь, нерівностей. Типи рівнянь з параметрами.	2
Тема 2		Лінійні рівняння та нерівності з параметрами	6 год
5 – 6		Розв'язування лінійних рівнянь з параметрами	2
7 – 8		Розв'язування лінійних нерівностей з параметрами	2
9 – 10		Лінійні рівняння та нерівності з параметрами	2
Тема 3		Квадратична функція	10 год
11 – 12		Квадратний тричлен. Квадратична функція, дискримінант, коефіцієнт, вершина параболи, графік функції. Опорні задачі	2
13 – 14		Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами	2
15 – 17		Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами	3
18 – 20		Розв'язування квадратних рівнянь та нерівностей з параметрами	3
Тема 4		Рівняння з модулями, що містять параметр	4 год
21 – 22		Рівняння з модулями, що містять параметр	2
23 – 24		Розв'язування рівнянь з модулями, що містять параметр	2
Тема 5		Раціональні рівняння з параметрами (6 год.)	6 год
25 – 26		Раціональні рівняння з параметрами	2
27 – 28		Дробово – раціональні рівняння з параметрами	2
29 – 30		Раціональні рівняння та нерівності з параметрами	2
Тема 6		Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами	4 год
31 – 32		Розв'язування рівнянь з параметрами графічним способом	2
33 – 34		Розв'язування рівнянь з параметрами графічним способом. Підсумкове заняття.	2

ВИСНОВОК

Задачі з параметрами є одним з найпотужніших засобів узагальнення та систематизації знань учнів, формування в них логічності, гнучкості, критичності мислення. Розв'язування задач із параметрами відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів необхідних для математичного розвитку особистості.

Вивчення курсу передбачає використання традиційних і нетрадиційних форм та методів навчання: лекцій, семінарів, дискусій тощо. Велика увага приділяється індивідуальній та самостійній роботі учнів.

Організація таких занять сприяє, розширенню та поглибленню знань учнів з математики, підготовці їх до олімпіад різних рівнів. Уміння розв'язувати нестандартні задачі з параметрами свідчить про глибоке знання, розуміння математичної теорії та знаходження особливого, нестандартного підходу до виконання вправ.

Різноманітність завдань, ступінь їх складності, інтегрований підхід до кожного учня коректно та доступно викладені у методичній розробці. Методичні поради формують знання, уміння та навички в розв'язанні задач з параметрами, розвитку математичних понять, допомагають у підготовці до математичних олімпіад, конкурсів, зовнішнього незалежного оцінюванні з математики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів з математики: Навчальні програми для профільного навчання, програма факультативів, спецкурсів, гуртків, МОН України, Київ, «Навчальна книга», 2003.
2. Г.Апостолова, В.Ясінський Перші зустрічі з параметрами. – Київ: Факт, 2006.
3. В.Амелькін, В.Рабцевич, Задачі з параметрами: Справ. посібник по матем.- Минск:Аскар, 1996.
4. Л.Заслонкіна, Задачі з параметрами. Харків, видавнича група «Основа», 2012.
5. В.Лукаш, Е.Пресс Розв'язуємо задачі з параметрами. Харків, видавнича група «Основа», 2016.
6. В.Рапета, Н.Клешня, М.Коробова, Л. Репета Задачі з параметрами. Розвязки, рекомендації, приклади: навчальний посібник для старшакласників та абітурієнтів. Тернопіль: Підручники і посібники, 2002
7. Т. Непочатова, І. Сіренький, Г. Смішко «Математичні олімпіади Хмельниччини», інформаційний вісник ХОППО, 2009.
8. П. Горнштейн «Задачі з параметрами», Київ, РІА «Текст», 1992
9. Науково-методичний журнал «Математика в школах України»



**УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ ГОЛОСІЇВСЬКОЇ РАЙОННОЇ
В МІСТІ КИЄВІ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ**

**ШКОЛА II-III СТУПЕНІВ № 319
ІМЕНІ ВАЛЕРІЯ ЛОБАНОВСЬКОГО МІСТА КИЄВА**

проспект Червонозоряний, 146-148, м. Київ, 03118,
тел./факс (044) 525-62-49, e-mail: zpz319@ukr.net, код ЄДРПОУ 22879599

30.11.2020 № 04-сб/126
на № _____ від _____

Голові науково-методичної ради
РНМЦ управління освіти
Голосіївської районної в місті
Києві Державної адміністрації
Чайковській Н.В.

КЛОПОТАННЯ

Адміністрація закладу просить розглянути матеріали методичної розробки вчителя математики Федорчук Наталії Григорівни за темою «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики» та надати рекомендації щодо її впровадження в освітній процес.

До клопотання додаються матеріали:

- методична розробка вчителя математики Федорчук Наталії Григорівни за темою «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики»;
- відгук про апробацію методичної розробки;
- витяг з протоколу засідання шкільної методичного об'єднання вчителів фізико-математичного циклу школи II-III ступенів №319 імені Валерія Лобановського міста Києва.

Директор



А. Романчук

ВІДГУК

**про результати апробації методичної розробки вчителя математики
школи II-III ступенів № 319 імені Валерія Лобановського міста Києва**

Федорчук Наталі Григорівни

*на тему: «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в
шкільному курсі математики»*

Апробацію методичної розробки вчителя математики школи II-III ступенів № 319 імені Валерія Лобановського міста Києва Федорчук Наталі Григорівни на тему: «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики» проводила вчитель математики школи I-III ступенів №108 міста Києва Красько Світлана Володимирівна.

Робота над методичною розробкою сприяла обміну, систематизації та трансформації педагогічного досвіду вчителів, підвищенню їх фахової майстерності,.

У методичній розробці структуровано матеріал відповідно до тем, що входять до складу основної та факультативної програм з математики. Підібраний матеріал сприяє найбільш повній реалізації можливостей учнів, робить шкільну математичну освіту проблемно-діяльнісною. У матеріалах розроблених, Наталією Григорівною розкрито форми роботи, які дозволяють учню на основі логічного мислення, глибше осмислити сутність розв'язування задач з параметрами, розширюють світогляд, поглиблюють знання з предмету.

Задачі з параметрами є одним з найпотужніших засобів узагальнення та систематизації знань учнів, формування в них логічності, гнучкості, критичності мислення. Розв'язування задач із параметрами відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів необхідних для математичного розвитку особистості.

У методичній розробці розгляд задач з параметрами розпочинається поступово. Вивчення курсу передбачає використання традиційних і

нетрадиційних форм та методів навчання: лекцій, семінарів, дискусій тощо. Велика увага приділяється індивідуальній та самостійній роботі учнів.

Організація таких занять сприяє, розширенню та поглибленню знань учнів з математики, підготовці їх до олімпіад різних рівнів. Уміння розв'язувати нестандартні задачі з параметрами свідчить про глибоке знання, розуміння математичної теорії та знаходження особливого, нестандартного підходу до виконання вправ.

Досвід вчителя надає можливість робити процес навчання цікавим, залучати до розв'язування задач учнів з різним рівнем знань, що дає добрі результати. Різноманітність завдань, ступінь їх складності, інтегрований підхід до кожного учня коректно та доступно викладені у методичній розробці.

Результати апробації методичної розробки дозволяють стверджувати, що слушні методичні поради вчителя формують знання, уміння та навички в розв'язанні задач з параметрами, посилення мотивації навчання, розвитку математичних понять, підготовки до математичних олімпіад, конкурсів, зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Розглянуто на засіданні методичної комісії природничо-математичних дисциплін школи I-III ступенів №108 міста Києва (протокол від 19.11. 2020 року №3).

Вважаємо, що представлені матеріали мають теоретичне та практичне значення, можуть бути рекомендовані для використання вчителями математики закладів загальної середньої освіти.

Рекомендовано для затвердження на методичній раді РНМЦ управління освіти Голосіївської районної державної адміністрації міста Києва.

Вчитель математики школи I – III ступенів
№ 108 міста Києва

Директор



С.В.Красько

С. Колесникова

ВИТЯГ

з протоколу № 3 від 26.11.2020 засідання методичного об'єднання вчителів
фізико-математичного циклу школи ІІ-ІІІ ступенів № 319
імені Валерія Лобановського міста Києва

Присутні: вчителів прородно-математичних дисциплін

Запрошені: директор школи ІІ-ІІІ ступенів № 319 імені Валерія Лобановського
міста Києва

ПОРЯДОК ДЕННИЙ:

1. Впровадження методичної розробки, вчителя математики школи ІІ-ІІІ ступенів № 319 імені Валерія Лобановського міста Києва Федорчук Н. Г. на тему: «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики», в навчально-виховний процес.

СЛУХАЛИ:

учителя математики школи ІІ-ІІІ ступенів № 319 імені Валерія Лобановського міста Києва Федорчук Н. Г., яка ознайомила присутніх із змістом своєї методичної розробки на тему: «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики», що пройшла апробацію в школі І-ІІІ ступенів №108 міста Києва.

ВИСТУПИЛИ:

Нікольська О.М. голова методичного об'єднання вчителів фізико-математичного циклу, Вознюк Г.І. вчитель математики, які відмітили, що в методичній розробці розкрито форми роботи, які дозволяють учню на основі логічного мислення, глибше осмислити сутність розв'язування задач з параметрами, розширити світогляд, поглибити знання з предмету.

Вчителем пропонується система завдань для підтримки особистісно зорієнтованого навчання при виконанні вправ з параметрами, підготовлених у вигляді карток. До завдань додаються поради для учнів, варіанти відповідей, методичні рекомендації для вчителя. Сукупність їх складності та особливості розв'язання викладено послідовно і доступно.

Вознюк Галина Іванівна, вчитель математики, яка зазначила, що задачі з параметрами запропоновані у методичній розробці використовує на своїх уроках. Слушні методичні поради вчителя Федорчук Н.Г. формують знання, уміння та навички в розв'язанні задач з параметрами, розвитку математичної мислення, допомагає в підготовці до математичних олімпіад, конкурсів, зовнішнього незалежного оцінюванні. Задачі з параметрами є одним з найпотужніших засобів узагальнення та систематизації знань учнів,

формування в них логічності, гнучкості, критичності мислення. Розв'язування задач із параметрами відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів необхідних для математичного розвитку особистості.

УХВАЛИЛИ:

1. Вважати, що методична розробка представлена вчителем математики II-III ступенів Федорчук Н. Г. на тему: «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики», є актуальною, змістовною, корисною при та рекомендована для використання вчителями математики загальноосвітніх навчальних закладів.

2. Схвалити та рекомендувати методичну розробку вчителя математики Федорчук Н. Г. на тему: «Систематизація знань при розв'язуванні задач з параметрами в шкільному курсі математики» для затвердження на методичній раді районного науково-методичного центру управління освіти Голосіївської районної місті Києві державної адміністрації

Голова методичного об'єднання
вчителів фізико-математичного циклу

О.М.Нікольська

Директор



А.Д. Романчук